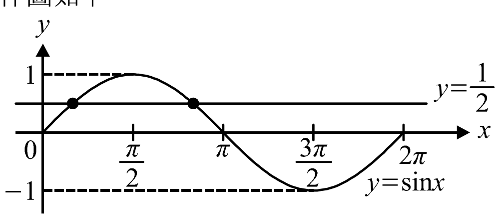
113 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(B)卷　詳解

數學(B)卷　　113-3-B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	D	C	A	D	B	D	A	A	B	C	B	A	B	C	C	C	D	C	A	D	D	A	C	B

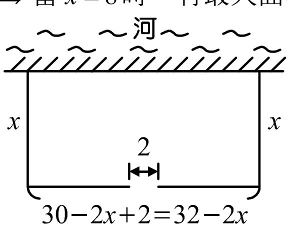
1. 依題意，由除法原理得
$x^3+4x^2+5x-3=f(x)\cdot(x+2)+(2x-1)$
$\Rightarrow x^3+4x^2+3x-2=f(x)\cdot(x+2)$
即 $f(x)$ 為 (x^3+4x^2+3x-2) 除以 $(x+2)$ 之商式
利用綜合除法
$$\begin{array}{r|l} 1+4+3-2 & -2 \\ -2-4+2 & \\ \hline 1+2-1\ ,0 & \end{array}$$
得 $f(x)=x^2+2x-1$，故選(B)

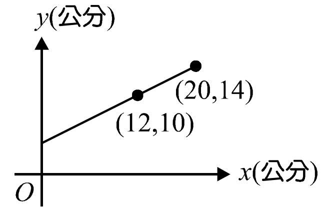
2. 因 $2025°=360°\times5+225°$
$a=\sin2025°=\sin225°=-\sin45°=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$b=\cos2025°=\cos225°=-\cos45°=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
$c=\tan2025°=\tan225°=\tan45°=1$，可知 $c>a=b$
故選(D)

3. 作圖如下


函數 $y=\sin x$ 與直線 $y=\dfrac{1}{2}$ 有 2 個交點，故選(C)

4. (A) ○：$a_1=2^1=2$，$a_2=2^2=4$，$a_3=2^3=8$，$a_4=2^4=16$，$a_5=2^5=32$，符合
(B) ×：$a_1=2^{1-1}+1=2$，$a_2=2^{2-1}+1=3$，不合
(C) ×：$a_2=a_1+1^2=2+1=3$，不合
(D) ×：$a_2=a_1+1=2+1=3$，不合
故選(A)

5. 設寬為 x 公尺，得長為 $30-2x+2=32-2x$ 公尺
$\Rightarrow$ 面積為 $f(x)=x(32-2x)=-2x^2+32x$
$=-2(x^2-16x+64-64)=-2(x-8)^2+128$
$\Rightarrow$ 當 $x=8$ 時，有最大面積 128 平方公尺，故選(D)


6. 設砝碼重量為 x 公克，彈簧長度為 y 公分
求通過兩點(12 , 10)、(20 , 14)之直線方程式
$\Rightarrow m=\dfrac{14-10}{20-12}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$
由點斜式得 $y-10=\dfrac{1}{2}(x-12)$，化簡得 $x-2y+8=0$
當 $x=0$ 時，得 $y=4$，故選(B)


[另解]
設彈簧原長為 x 公分，由伸長的長度與所掛物的重量成正比，列式如下：
$\dfrac{10-x}{12}=\dfrac{14-x}{20}\Rightarrow12(14-x)=20(10-x)$
$\Rightarrow168-12x=200-20x\Rightarrow8x=32\Rightarrow x=4$，故選(B)

7. $\angle A=\dfrac{1}{1+2+3}\times180°=30°$、$\angle B=\dfrac{2}{1+2+3}\times180°=60°$
$\angle C=\dfrac{3}{1+2+3}\times180°=90°$
由正弦定理，$a：b：c=\sin A：\sin B：\sin C$
$=\sin30°：\sin60°：\sin90°=\dfrac{1}{2}：\dfrac{\sqrt{3}}{2}：1=1：\sqrt{3}：2$
故選(D)

8. $\overrightarrow{AC}=(3-1\ ,3-2)=(2\ ,1)$
$\overrightarrow{AB}=(5-1\ ,-1-2)=(4\ ,-3)$
$\overrightarrow{BC}=(3-5\ ,3-(-1))=(-2\ ,4)$
$\Rightarrow\ \overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AB}=(2\ ,1)+t(4\ ,-3)=(2+4t\ ,1-3t)$
又 $(\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AB})\,//\,\overrightarrow{BC}\Rightarrow\dfrac{2+4t}{-2}=\dfrac{1-3t}{4}$
$\Rightarrow8+16t=-2+6t\Rightarrow10t=-10\Rightarrow t=-1$，故選(A)

9. 因 $P(1\ ,k)$ 在圓上 $\Rightarrow(1+2)^2+(k-1)^2=13$
$\Rightarrow(k-1)^2=4\Rightarrow k-1=\pm2\Rightarrow k=3$ 或 -1 (不合)
又 $P(1\ ,3)$ 在直線 L 上 $\Rightarrow3+6+c=0\Rightarrow c=-9$
$\Rightarrow c+k=-9+3=-6$，故選(A)

10. 利用點斜式
L_1 通過(4 , 2)、(5 , 0)得 $L_1：2x+y-10=0$
L_2 通過(4 , 2)、(0 , 3)得 $L_2：x+4y-12=0$

區域 R 可以表示爲 $\begin{cases} x \ge 0\,,\, y \ge 0 \\ 2x+y-10 \le 0 \\ x+4y-12 \le 0 \end{cases}$

以 $(k+1\,,\,2k-1)$ 代入成立

$$\Rightarrow \begin{cases} k+1 \ge 0 \\ 2k-1 \ge 0 \\ 2(k+1)+(2k-1)-10 \le 0 \\ (k+1)+4(2k-1)-12 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \ge -1 \\ k \ge \dfrac{1}{2} \\ k \le \dfrac{9}{4} \\ k \le \dfrac{5}{3} \end{cases}$$

$\therefore \dfrac{1}{2} \le k \le \dfrac{5}{3}$，故選(B)

[另解]

利用點斜式

L_1 通過(4 , 2)、(5 , 0)得 L_1：$2x+y-10=0$

L_2 通過(4 , 2)、(0 , 3)得 L_2：$x+4y-12=0$

區域 R 可以表示爲 $\begin{cases} x \ge 0\,,\, y \ge 0 \\ 2x+y-10 \le 0 \\ x+4y-12 \le 0 \end{cases}$

(A) $k=0$，即點 $(1\,,\,-1)$ 與 $y \ge 0$ 矛盾

(B) $k=1$，即點(2 , 1)，符合

(C) $k=2$，即點(3 , 3)，代入 $x+4y-12 \le 0$，矛盾

(D) $k=3$，即點(4 , 5)，代入 $x+4y-12 \le 0$，矛盾

故選(B)

11. 原式 $=(\dfrac{4^3}{5^3})^{\frac{1}{3}} \times (\dfrac{2^4}{5^4})^{-\frac{1}{4}} \times (\dfrac{1}{2^2})^{-\frac{3}{2}}$

$=[(\dfrac{4}{5})^3]^{\frac{1}{3}} \times [(\dfrac{2}{5})^4]^{-\frac{1}{4}} \times (2^{-2})^{-\frac{3}{2}}$

$=\dfrac{4}{5} \times (\dfrac{2}{5})^{-1} \times 2^3 = \dfrac{4}{5} \times \dfrac{5}{2} \times 8 = 16$，故選(C)

12. $|x+a|>5 \Rightarrow x+a>5$ 或 $x+a<-5$

$\Rightarrow x>5-a$ 或 $x<-5-a$

$\Rightarrow 5-a=3 \Rightarrow a=2$，故選(B)

13. 由斜率爲 2 $\Rightarrow m_L=-\dfrac{a}{-1}=a=2 \Rightarrow L$：$2x-y+b=0$

又點 $P(2\,,\,3)$ 到直線 L 的距離爲 $\sqrt{5}$

$\Rightarrow d(P\,,\,L)=\dfrac{|4-3+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5} \Rightarrow |1+b|=5$

$\Rightarrow b+1=\pm 5 \Rightarrow b=4$ 或 -6(不合)

即 $a+b=2+4=6$，故選(A)

14. 因 $2x-1$、$x-2$ 爲 $f(x)$ 之因式，由因式定理得

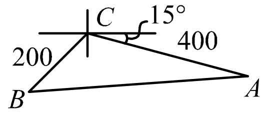
$f(\dfrac{1}{2})=f(2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{8}a-\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}b+2=0 \\ 8a-12+2b+2=0 \end{cases}$

整理得 $a+4b+10=0 \cdots$①、$8a+2b-10=0 \cdots$②

②×2－①，$15a-30=0 \Rightarrow a=2$，代回①得 $b=-3$，

即 $a+b=2+(-3)=-1$，故選(B)

15. 令恆春爲 C，依題意作圖如下：



$\angle ACB=75°+45°=120°$，由餘弦定理得

$\overline{AB}^2=400^2+200^2-2\times 400\times 200\times \cos 120°=280000$

$\Rightarrow \overline{AB}=200\sqrt{7}$，平均速度爲 $\dfrac{200\sqrt{7}}{20}=10\sqrt{7}$ 公里/小時，故選(C)

16. 設夾角爲 θ，由 $|3\vec{a}-2\vec{b}|=6$ 兩邊平方得：

$36=|3\vec{a}-2\vec{b}|^2=9|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2$

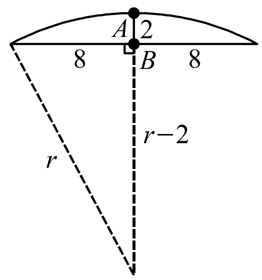
$=9\cdot 2^2-12\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\theta+4\cdot 3^2$

$\Rightarrow 72\cos\theta=36 \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{1}{2}$，得 $\theta=60°$，故選(C)

17. 設圓半徑爲 r 公尺，如下圖

利用畢氏定理 $\Rightarrow r^2=8^2+(r-2)^2$

$\Rightarrow r^2-(r-2)^2=64 \Rightarrow 4r-4=64 \Rightarrow r=17$，故選(C)



18. 由根與係數關係 $\begin{cases} \alpha+\beta=-\dfrac{-3}{1}=3 \\ \alpha\beta=\dfrac{-1}{1}=-1 \end{cases}$

又 $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2(-1)=11$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-1)^2=1$

以 α^2、β^2 爲兩根的二次方程式爲 $(x-\alpha^2)(x-\beta^2)=0$

即 $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$

代入得 $x^2-11x+1=0$，故選(D)

19. 設中型巴士租 x 輛、遊覽車租 y 輛，依題意列式得

$\begin{cases} x=y+2 \cdots① \\ 25x+6=42(y-1)+30 \cdots② \end{cases}$

①代入②得 $25(y+2)+6=42(y-1)+30$

$\Rightarrow 25y+56=42y-12 \Rightarrow 17y=68 \Rightarrow y=4$

代入 $42(y-1)+30=42\times 3+30=156$，故選(C)

20. 依題意

$t=1$ 代入得：$80=a(1-10^{-b}) \cdots$①

$t=2$ 代入得：$120=a(1-10^{-2b}) \cdots$②

由 $\dfrac{②}{①}$ 得：$\dfrac{120}{80}=\dfrac{a[1-(10^{-b})^2]}{a(1-10^{-b})}=\dfrac{a(1-10^{-b})(1+10^{-b})}{a(1-10^{-b})}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{2}=1+10^{-b} \Rightarrow 10^{-b}=\dfrac{1}{2}$

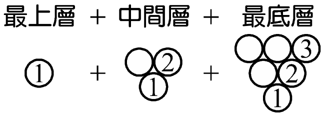
代入①得：$a=160 \Rightarrow L(t)=160[1-(\dfrac{1}{2})^t]$

$t=3$ 代入得：$L(3)=160(1-\frac{1}{8})=140$，故選(A)

21. 依題意，$2=-\log[H^+]\Rightarrow[H^+]=10^{-2}$ 莫耳/公升
即檸檬汁的氫離子濃度為 10^{-2} 莫耳/公升
$5=-\log[H^+]\Rightarrow[H^+]=10^{-5}$ 莫耳/公升
即咖啡的氫離子濃度為 10^{-5} 莫耳/公升
$\Rightarrow\frac{10^{-2}}{10^{-5}}=10^3=1000$ 倍，故選(D)

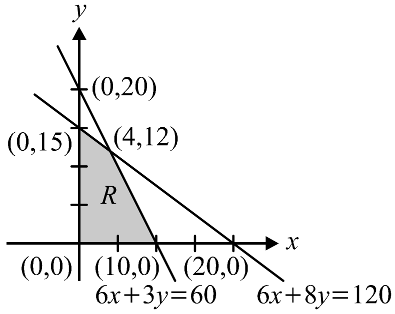
22. 設 $f(x)$ 除以 x^2-6x+8 的餘式為 $ax+b$
依題意，由除法原理表示如下：
$f(x)=(x^2-3x+2)\cdot q_1(x)+5x-6$
$=(x^2+x-20)\cdot q_2(x)+x-2$
$=(x^2-6x+8)\cdot q(x)+ax+b$
整理得 $f(x)=(x-1)(x-2)\cdot q_1(x)+5x-6\cdots$①
$=(x+5)(x-4)\cdot q_2(x)+x-2\cdots$②
$=(x-2)(x-4)\cdot q(x)+ax+b\cdots$③
由①、③將 $x=2$ 代入得 $f(2)=4=2a+b\cdots$④
由②、③將 $x=4$ 代入得 $f(4)=2=4a+b\cdots$⑤
由④、⑤解得 $a=-1$、$b=6$，即餘式為 $-x+6$
故選(D)

23. 如下圖，3 層香檳塔所需杯數為
最上層 ＋ 中間層 ＋ 最底層



$1+(1+2)+(1+2+3)=1+3+6=10$
4 層香檳塔所需杯數為
$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)=1+3+6+10=20$
5 層香檳塔所需杯數為
$1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+(1+2+3+4+5)$
$=1+3+6+10+15=35$
依此類推，10 層香檳塔所需杯數為
$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots+10)$
$=1+3+6+10+15+21+28+36+45+55=220$
故選(A)

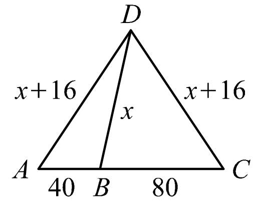
24. 設開直營店 x 間，百貨公司專櫃 y 間
依題意列式如下：$\begin{cases}x\ge0\,,\,y\ge0\\6x+8y\le120\\6x+3y\le60\end{cases}$
利潤函數為 $f(x,y)=15x+10y$
依聯立不等式條件作圖如下：得可行解區域 R



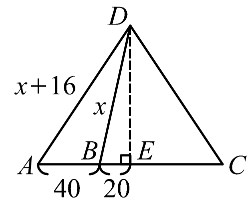
(x,y)	$(0,0)$	$(0,15)$	$(10,0)$	$(4,12)$
$f(x,y)$	0	150	150	180

最大利潤為 180 萬元，故選(C)

25. 設震央 D 與 B 地的距離為 x 公里
$\Rightarrow\overline{AD}=\overline{CD}=x+16$



ΔDAB 中，$\cos A=\frac{40^2+(x+16)^2-x^2}{2\times40\times(x+16)}$
ΔDAC 中，$\cos A=\frac{120^2+(x+16)^2-(x+16)^2}{2\times120\times(x+16)}$
$\Rightarrow\frac{40^2+(x+16)^2-x^2}{2\times40\times(x+16)}=\frac{120^2+(x+16)^2-(x+16)^2}{2\times120\times(x+16)}$
$\Rightarrow\frac{40^2+(2x+16)(16)}{1}=\frac{120^2}{3}$
$\Rightarrow1600+32(x+8)=4800\Rightarrow x+8=100\Rightarrow x=92$
故選(B)
[另解]



作 $\overline{DE}\perp\overline{AC}$
在 ΔBDE 中，$\overline{DE}=\sqrt{x^2-20^2}=\sqrt{x^2-400}$
在 ΔADE 中，$(x+16)^2=60^2+\sqrt{x^2-400}^2$
$\Rightarrow x^2+32x+256=3600+x^2-400$
$\Rightarrow32x=2944\Rightarrow x=92$，故選(B)