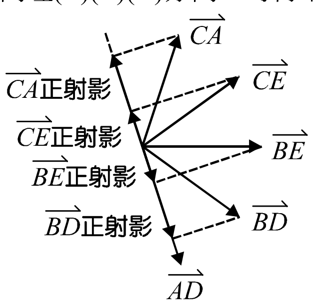
110 學年度四技二專第一次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

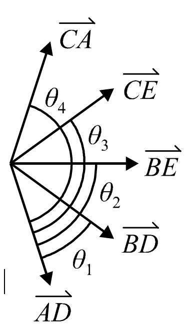
數學(C)卷　　110-1-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	C	A	D	C	B	D	D	B	D	B	C	B	C	A	C	A	D	A	A	C	B	D	B

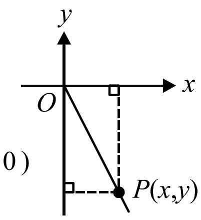
1. $f(-1)=(-3)(-1)+b=4\Rightarrow b=1$
   $f(1)=1\Rightarrow c\times1^2=1\Rightarrow c=1$
   $f(2)=4\Rightarrow c\times2^2=4\Rightarrow c=1$符合題意
   其中 a 依然未知，選項(C)錯誤，(A)(D)不確定
   故選(B)
2. $\overline{AB}=\sqrt{[x-(-1)]^2+(6-3)^2}=\sqrt{13}$
   兩邊平方得 $(x+1)^2+9=13\Rightarrow(x+1)^2=4$
   $\Rightarrow x+1=\pm2\Rightarrow x=-1\pm2=1$ 或 -3
   又 B 在第二象限，$x=1$ 不合，故選(A)
3. $\overrightarrow{AB}=(5-(-1)\,,\,x-1)=(6\,,\,x-1)$
   $\overrightarrow{CD}=(2-(-1)\,,\,8-3)=(3\,,\,5)$
   $\because\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{CD}$
   $\therefore\dfrac{6}{3}=\dfrac{x-1}{5}\Rightarrow2=\dfrac{x-1}{5}\Rightarrow x=11$，故選(C)
4. 選項(A)中 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AD}|(|\overrightarrow{BD}|\cos\theta)$
   $=\pm(\overrightarrow{AD}$向量長度$)($在$\overrightarrow{AD}$上的正射影長$)$
   其中正射影與 $\overrightarrow{AD}$ 同向取 $+$，反向取 $-$
   同理(B)(C)(D)亦同，可得下圖：



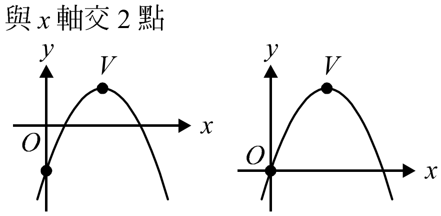
   由圖可得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}$ 最大，故選(A)
   [另解]由定義可知



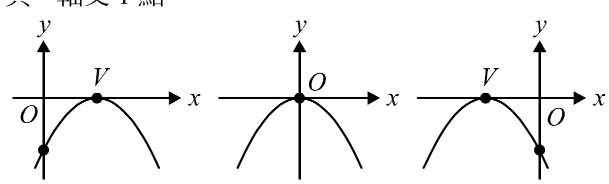
   $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos\theta_1$
   $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CE}|\cdot\cos\theta_2$
   $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CA}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{CA}|\cdot\cos\theta_3$
   $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BE}|\cdot\cos\theta_4$
   又 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BD}|=|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{CA}|=|\overrightarrow{BE}|$
   所以找兩向量夾角最小的即是所求
   由圖可知：θ_1 為最小角，所以 $\cos\theta_1$ 為最大
   所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos\theta_1$ 為最大，故選(A)
5. $(x^2+9)-bx>0\Rightarrow x^2-bx+9>0$ 恆成立
   $\Rightarrow\begin{cases}\text{首項係數}1>0\\ \text{判別式}(-b)^2-4\cdot1\cdot9<0\end{cases}\Rightarrow b^2<36$
   $\Rightarrow-6<b<6$，故選(D)
6. $\sin387°=\sin(360°+27°)=\sin27°$
   $\sin287°=\sin(360°-73°)=-\sin73°$
   $\cos187°=\cos(180°+7°)=-\cos7°=-\sin83°$
   $\cos87°=\sin3°$
   $\because\sin27°>\sin3°>0>-\sin73°>-\sin83°$
   $\therefore\sin387°>\cos87°>\sin287°>\cos187°$
   故選(C)
7. 由定義，設 θ 終邊上一點 $P(x\,,\,y)$



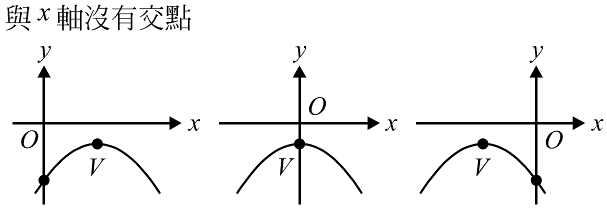
   $\Rightarrow\tan\theta=\dfrac{y}{x}=-2=\dfrac{-2}{1}$
   ($\because\theta$為第四象限角　$\therefore x>0$，$y<0$)
   $\Rightarrow$ 不失一般性，令 $x=1$，$y=-2$
   $\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{-2}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\dfrac{-2}{\sqrt5}=\dfrac{-2\sqrt5}{5}$
   $\sec\theta=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\dfrac{\sqrt{1^2+(-2)^2}}{1}=\sqrt5$
   $\Rightarrow$ 所求 $=\dfrac{-2\sqrt5}{5}+\sqrt5=\dfrac{-2\sqrt5+5\sqrt5}{5}=\dfrac{3\sqrt5}{5}$
   故選(B)
8. $f(x)=ax^2+bx+c$ 可能的函數圖形可分類如下：
   與 x 軸交 2 點



   與 x 軸交 1 點



   與 x 軸沒有交點



   (1) 因為函數圖形可能與 x 軸交 0、1 或 2 個點
   $\Rightarrow b^2-4ac$ 之正負無法確定 $\Rightarrow$ (A)(B)選項錯誤
   (2) 因為圖形未過第二象限 $\Rightarrow$ 拋物線開口必向下
   $\Rightarrow a<0\Rightarrow$ (C)選項錯誤、(D)選項正確，故選(D)

9. 由 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{3}$，兩邊平方得 $(\sin\theta-\cos\theta)^2=(\frac{1}{3})^2$

$\Rightarrow \sin^2\theta-2\sin\theta\cdot\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$\Rightarrow 1-2\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{1}{9}\Rightarrow \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{4}{9}$

所求 $=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cdot\cos\theta}$

$=\frac{1}{\sin\theta\cdot\cos\theta}=\frac{9}{4}$，故選(D)

10. 由分點公式可得 $A(\frac{2\times 0+1\times 3}{2+1},\frac{2\times 0+1\times 6}{2+1})=(1,2)$

又 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{OB}\Rightarrow \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OB}=0$

$\Rightarrow(-5-1,y-2)\cdot(3-0,6-0)=0$

$\Rightarrow(-6)\times 3+(y-2)\times 6=0\Rightarrow y=5$

故選(B)

11. 由三角平方關係可知 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

利用柯西不等式

$[\sin^2\theta+\cos^2\theta]\cdot[(\frac{3}{\sin\theta})^2+(\frac{4}{\cos\theta})^2]$

$\geq(\sin\theta\cdot\frac{3}{\sin\theta}+\cos\theta\cdot\frac{4}{\cos\theta})^2$

$\Rightarrow 1\cdot(\frac{9}{\sin^2\theta}+\frac{16}{\cos^2\theta})\geq(3+4)^2$

$\Rightarrow \frac{9}{\sin^2\theta}+\frac{16}{\cos^2\theta}\geq 49$

故選(D)

12. $|2\vec{a}-3\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=4\times 1^2-12\times(-1)+9\times 2^2=52$

$\Rightarrow |2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$

故選(B)

13. $\vec{a}=(\cos 30^\circ,-\sin 30^\circ)=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$

$\vec{b}=(-\sin 30^\circ,-\cos 30^\circ)=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\vec{a}+3\sqrt{3}\vec{b}=(\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}\times(-\frac{1}{2}),-\frac{1}{2}+3\sqrt{3}\times(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$

$=(-\sqrt{3},-5)$

所求 $|\vec{a}+3\sqrt{3}\vec{b}|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-5)^2}=2\sqrt{7}$

故選(C)

14. 將 $y=\cos x$ 向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位得 $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})$

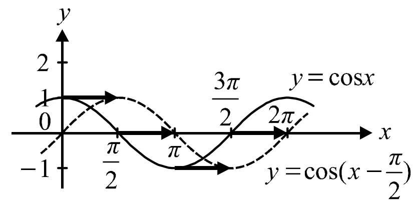
再將圖形在 x 軸下方的部份對 x 軸作對稱翻上來

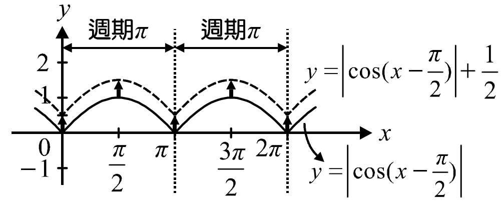
得 $y=\left|\cos(x-\frac{\pi}{2})\right|$，再向上平移 $\frac{1}{2}$ 單位

得 $y=\left|\cos(x-\frac{\pi}{2})\right|+\frac{1}{2}$，如下圖

週期變為 $y=\cos x$ 的 $\frac{1}{2}$ 倍，即 $\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$

故選(B)

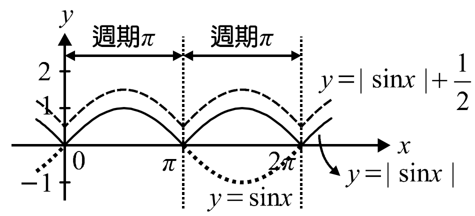




[另解]原式為 $y=\left|\cos(x-\frac{\pi}{2})\right|+\frac{1}{2}=\left|\cos(\frac{\pi}{2}-x)\right|+\frac{1}{2}$

$=|\sin x|+\frac{1}{2}$

將 $y=\sin x$ 圖形在 x 軸下方的部份對 x 軸作對稱翻上來得 $y=|\sin x|$，再向上平移 $\frac{1}{2}$ 單位，如下圖



週期變為 $y=\sin x$ 的 $\frac{1}{2}$ 倍，即 $\frac{1}{2}\times 2\pi=\pi$，故選(B)

15. 利用餘弦定理

$\overline{BC}^2=(\sqrt{5}+1)^2+2^2-2\cdot(\sqrt{5}+1)\cdot 2\cdot\cos 120^\circ$

$=5+2\sqrt{5}+1+4+2\sqrt{5}+2=12+4\sqrt{5}$

$\Rightarrow \overline{BC}=\sqrt{12+4\sqrt{5}}=\sqrt{12+2\sqrt{20}}=\sqrt{(\sqrt{10}+\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{10}+\sqrt{2}$，故選(C)

16. 原式 $=\cos\theta\cdot(-\tan\theta)+(-\sec\theta)\cdot\cot\theta$

$=\cos\theta\cdot(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta})+(-\frac{1}{\cos\theta})(\frac{\cos\theta}{\sin\theta})=-\sin\theta-\frac{1}{\sin\theta}$

$=-\frac{1}{3}-3=-\frac{10}{3}$，故選(A)

17. $2\cos^2\theta+\cos\theta=0\Rightarrow\cos\theta\cdot(2\cos\theta+1)=0$

$\Rightarrow\cos\theta=0$ 或 $-\frac{1}{2}$

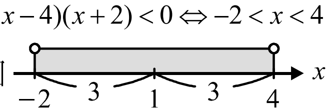
若 $\cos\theta=0$ 且 $\pi\leq\theta<2\pi$，則 $\theta=\frac{3\pi}{2}$

若 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ 且 $\pi\leq\theta<2\pi$，則 $\theta=\frac{4\pi}{3}$

所求 $=\frac{4\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}=\frac{17\pi}{6}$，故選(C)

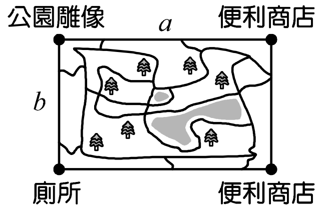
18. $-x^2+2x+8>0\Leftrightarrow x^2-2x-8<0$

$\Leftrightarrow(x-4)(x+2)<0\Leftrightarrow -2<x<4$

如圖 

，由絕對值不等式的幾何意義可得，$|x-1|<3$ 的解亦為 $-2<x<4$，故 $a=1$，$b=3$，$2a+b=5$，故選(A)

19. 設公園長爲 a，寬爲 b $(a, b>0)$，如下圖，由題意可得 $2a+3b=3600$，且公園面積 $=ab$，由算幾不等式，$\dfrac{2a+3b}{2}\geq\sqrt{(2a)(3b)}\Rightarrow\dfrac{3600}{2}\geq\sqrt{6ab}$，兩邊平方可得 $6ab\leq 1800^2\Rightarrow ab\leq 540000\Rightarrow ab$ 最大爲 540000 平方公尺，即公園面積最大爲 54 公頃，故選(D)



20. 由海龍公式 $\Rightarrow s=\dfrac{1}{2}(13+14+15)=21$

$\Delta ABC=\sqrt{21\cdot(21-13)(21-14)(21-15)}=84$

又由三角形面積公式

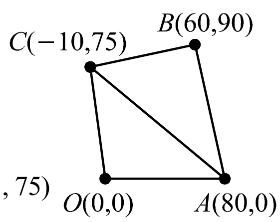
$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})\cdot r\Rightarrow 84=21\cdot r\Rightarrow r=4$

故內切圓面積爲 $\pi\cdot 4^2=16\pi$

斜線面積 $=\Delta ABC$ 面積 $-$ 內切圓面積 $=84-16\pi$

故選(A)

21. 四邊形 $OABC$ 如右圖



則四邊形面積

$=\Delta OAC+\Delta ABC$

$\overrightarrow{OA}=(80-0, 0-0)=(80, 0)$

$\overrightarrow{OC}=(-10-0, 75-0)=(-10, 75)$

$\Delta OAC=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}80 & 0\\ -10 & 75\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|80\cdot 75-0\cdot(-10)|=3000$

$\overrightarrow{BA}=(80-60, 0-90)=(20, -90)$

$\overrightarrow{BC}=(-10-60, 75-90)=(-70, -15)$

$\Delta ABC=\dfrac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}20 & -90\\ -70 & -15\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|20\cdot(-15)-(-90)\cdot(-70)|$

$=3300$

耕地面積 $=3000+3300=6300\ m^2$

又每 $70\ m^2$ 養一隻鴨 $\Rightarrow$ 應養 $\dfrac{6300}{70}=90$ 隻鴨子

故選(A)

22. $(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+|\vec{b}|^2$

$=2\cdot 2\cdot 3\cdot\cos\theta+3^2=9+12\cos\theta$

$\because -1\leq\cos\theta\leq 1\quad\therefore 9-12\leq 9+12\cos\theta\leq 9+12$

因此最大値 $M=21$，最小値 $m=-3$，$M-m=24$

故選(C)

23. 因 ΔABD 與 ΔBCD 有共同的外接圓，設該外接圓半徑爲 R，則由正弦定理：

ΔABD 中，$\dfrac{\overline{AB}}{\sin 60^\circ}=2R\Rightarrow\overline{AB}=2R\sin 60^\circ$

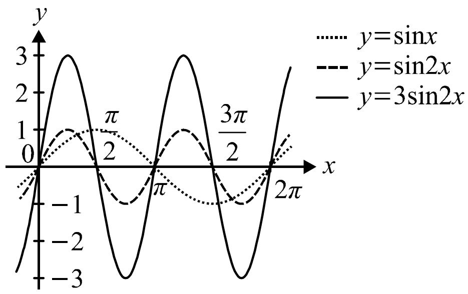
ΔBCD 中，$\dfrac{\overline{CD}}{\sin 45^\circ}=2R\Rightarrow\overline{CD}=2R\sin 45^\circ$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{2R\sin 60^\circ}{2R\sin 45^\circ}=\dfrac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

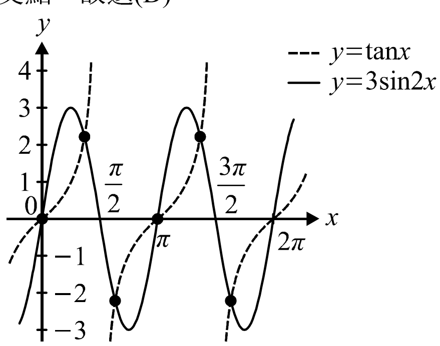
故選(B)

24. 將 $y=\sin x$ 圖形左右伸縮使週期變爲原來的 $\dfrac{1}{2}$ 倍得 $y=\sin 2x$

再經過上下伸縮使振幅變爲原來的 3 倍得 $y=3\sin 2x$，如下圖



再由下圖可得在 $0\leq x<2\pi$ 範圍內，兩函數共有 6 個交點，故選(D)



25. 圓輪的圓周長 $=r\cdot 2\pi=2\pi r$

又 $\overline{AB}=$ 圓輪滾 7 圈的距離 $\Rightarrow 210\pi=7\cdot 2\pi r\Rightarrow r=15$

所以 $\overline{BC}=$ 扇形 OCM 之弧長

$=r\theta=15\cdot\dfrac{2}{3}\pi=10\pi\ \left(\theta=120^\circ=\dfrac{2}{3}\pi\right)$

故 $\overline{BC}$ 的近似値爲 $10\times 3.14=31.4$ 公分

故選(B)