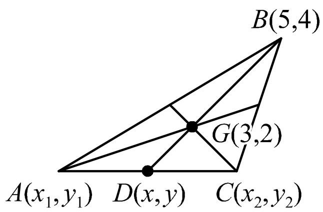
110 學年度四技二專第二次聯合模擬考試
共同科目　數學(B)卷　詳解

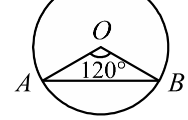
數學(B)卷 110-2-B

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	B	A	D	D	C	B	C	B	D	D	A	C	B	A	B	A	B	C	C	D	C	C	A	A

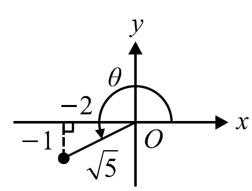
1. $a_1=5$
   $a_2=(-3)a_{2-1}=(-3)\times a_1=(-3)\times 5=-15$
   $a_3=(-3)a_{3-1}=(-3)\times a_2=(-3)\times(-15)=45$
   $a_4=(-3)a_{4-1}=(-3)\times a_3=(-3)\times 45=-135$，故選(D)
   [另解] $a_1=5$
   $\because a_n=(-3)a_{n-1}\Rightarrow$ 公比 $r=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=-3$
   $\therefore a_4=a_1\times r^{4-1}=5\times(-3)^3=-135$，故選(D)
2. 設 A 點坐標為 $(x_1\,,\,y_1)$，C 點坐標為 $(x_2\,,\,y_2)$，D 點坐標為 $(x\,,\,y)$
   由三角形重心坐標公式知



   $\dfrac{x_1+5+x_2}{3}=3$
   $\Rightarrow x_1+x_2=4$
   $\dfrac{y_1+4+y_2}{3}=2$
   $\Rightarrow y_1+y_2=2$
   $\because D$ 點為 $\overline{AC}$ 邊上的中點，由中點公式得
   $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{4}{2}=2$，$y=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{2}{2}=1$
   $\therefore D$ 點坐標為 $(2\,,1)$，故選(B)
   [另解]設 D 點坐標為 $(x\,,\,y)$
   $\because \overline{BG}:\overline{GD}=2:1$
   由分點公式得 $(\dfrac{2x+5}{2+1},\dfrac{2y+4}{2+1})=(3\,,2)$
   $\Rightarrow x=2$，$y=1$
   $\therefore D$ 點坐標為 $(2\,,1)$，故選(B)
3. $\because$方程式有兩實根$\Rightarrow$判別式 $b^2-4ac\ge 0$
   $\therefore[-(k-5)]^2-4\times1\times1\ge 0$
   $\Rightarrow k^2-10k+21\ge 0\Rightarrow(k-3)(k-7)\ge 0$
   $\Rightarrow k\ge 7$ 或 $k\le 3$，故選(A)
4. 原式：$5\overrightarrow{x}-5\overrightarrow{a}+10\overrightarrow{b}=3\overrightarrow{x}+3\overrightarrow{a}+12\overrightarrow{b}$
   $\Rightarrow 2\overrightarrow{x}=8\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}\Rightarrow \overrightarrow{x}=4\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$
   $\therefore \overrightarrow{x}=4\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=4(1\,,-1)+(2\,,3)$
   $=(4\,,-4)+(2\,,3)=(6\,,-1)$，故選(D)
5. $\because P(a^2b\,,a-b)$ 落在第三象限
   $\Rightarrow a^2b<0$，$a-b<0$
   $\Rightarrow a<0$，$b<0$，且 $a<b$
   $\Rightarrow b-a>0$，$-\dfrac{a}{b}<0$
   $\therefore Q(b-a\,,-\dfrac{a}{b})=(+\,,-)$ 落在第四象限，故選(D)
6. 設原來每班人數 x 人，則全校原班級總數為 $x+9$ 班
   $x(x+9)=1170\Rightarrow x^2+9x-1170=0$
   $\Rightarrow(x-30)(x+39)=0\Rightarrow x=30$ 或 -39 (不合)
   $\Rightarrow$ 原每班人數為 30 人，全校原班級總數為 39 班
   $\Rightarrow$ 各年級班級數為 $39\div 3=13$ 班
   $\because$一年級新生每班學生人數配合減少 1 人
   $\therefore$一年級新生招生人數最多 $(30-1)\times 13=377$ 人
   故選(C)
7. 設原二次函數圖形的頂點坐標為 $(x\,,\,y)$
   依題意 $(x+3\,,\,y-2)=(7\,,5)\Rightarrow x=4$，$y=7$
   $\because$原二次函數圖形的頂點坐標為 $(4\,,7)$ 且領導係數為 -2
   $\therefore f(x)=-2(x-4)^2+7=-2x^2+16x-25$
   比較係數得：$a=16$、$b=-25$
   $\Rightarrow a+b=16+(-25)=-9$，故選(B)
8. 設圓心為 O，$120^\circ=120\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2}{3}\pi$



   圓面積 $=6\times6\times\pi=36\pi$
   扇形 AOB 面積 $=\dfrac{1}{2}\times6^2\times\dfrac{2}{3}\pi=12\pi$
   ΔAOB 面積 $=\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\sin120^\circ=\dfrac{1}{2}\times6\times6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$
   $\therefore$隔熱墊上灰色部分的面積 $=$ 圓形 $-$ 扇形 $+$ 三角形
   $=36\pi-12\pi+9\sqrt{3}=24\pi+9\sqrt{3}$，故選(C)
9. $\begin{cases}\tan\theta=\dfrac{1}{2}>0\\ \sin\theta<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\theta\in \text{I 或 III}\\ \theta\in \text{III 或 IV}\end{cases}\Rightarrow\theta\in\text{III}$
   又 $\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，如右圖



   $\therefore \sin\theta+\cos\theta$
   $=(\dfrac{-1}{\sqrt{5}})+(\dfrac{-2}{\sqrt{5}})=\dfrac{-3\sqrt{5}}{5}$
   故選(B)
10. 如圖所示
    每一列灰磚鋪設數量 $<a_n>$ 依序為：1、3、5、7⋯⋯
    每一列白磚鋪設數量 $<b_n>$ 依序為：2、4、6⋯⋯
    $\Rightarrow$ 灰磚、白磚鋪設數量均為等差數列，且公差 d 均為 2
    又灰磚最後一列鋪設的數量為
    $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\times2=2n-1$

$\Rightarrow$ 灰磚鋪設數量總和

$S_n = \dfrac{[1+(2n-1)]\times n}{2} = 441 \Rightarrow n^2 = 441 \Rightarrow n = 21$

$\Rightarrow$ 白磚最後一列鋪設的數量爲

$b_{20} = b_1 + (20-1)d = 2 + 19\times 2 = 40$

$\therefore$ 白磚鋪設數量總和 $= \dfrac{(2+40)\times 20}{2} = 420$

故選(D)

11. 設半徑爲 r，圓心爲 $(r\,,-r)$

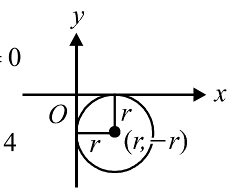
代入直線 L 得 $5\times r - 1\times(-r) - 12 = 0$

$\Rightarrow r = 2$，圓心爲 $(2\,,-2)$

$\therefore$ 圓方程式爲 $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x + 4y + 4 = 0$

故選(D)



12. $\because$ 兩軸的截距相等，設 x 截距 $= y$ 截距 $= a$

$\therefore L：\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{a} = 1$，$a \neq 0$

又 L 過點 $(5\,,-2)$ 代入得 $\dfrac{5}{a} + \dfrac{(-2)}{a} = 1 \Rightarrow a = 3$

$\therefore L：\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{3} = 1 \Rightarrow x + y - 3 = 0$，故選(A)

13. 設 $Q(x\,,y)$ 爲切線上異於 P 的一點，圓心 $O(2\,,-4)$

則 $\overrightarrow{OP} = (4\,,3)$、$\overrightarrow{PQ} = (x-6\,,y+1)$

$\because \overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PQ} = 0$

$\Rightarrow 4\times(x-6) + 3\times(y+1) = 0$

$\Rightarrow 4x + 3y - 21 = 0 \Rightarrow$ 直線 $L：4x+3y-21=0$

$\therefore$ 點 $(-1\,,-5)$ 到直線 L 的距離

$d = \dfrac{|4\times(-1)+3\times(-5)-21|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \dfrac{|-40|}{\sqrt{25}} = 8$，故選(C)

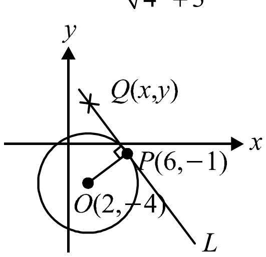
[另解]由已知切點求切線方程式公式知

直線 $L：(6-2)(x-2) + (-1+4)(y+4) = 25$

$\Rightarrow 4x + 3y - 21 = 0$

$\therefore$ 點 $(-1\,,-5)$ 到直線 L 的距離

$d = \dfrac{|4\times(-1)+3\times(-5)-21|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 8$，故選(C)



14. 同乘以 $(x+3)(x-3)$ 得

$(x+1)(x-3) + (-1)(x+3) = 12$

$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 - x - 3 = 12 \Rightarrow x^2 - 3x - 18 = 0$

$\Rightarrow (x+3)(x-6) = 0 \Rightarrow x = -3$ 或 6

但 $x=-3$ 代入原方程式會使分母爲 0(不合)

故方程式的解爲 $x = 6 = a$

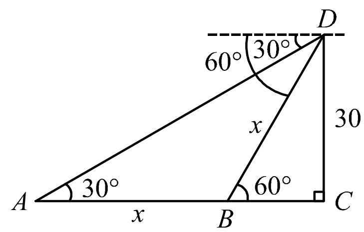
$\therefore$ 將 $a=6$ 代入所求可得 $\dfrac{3\times 6-1}{6+2} = \dfrac{17}{8}$，故選(B)

15. 如下圖，設小蘭在 1 分鐘內從 A 點移動至 B 點的距離爲 x 公尺

$\because \Delta ABD$ 爲等腰三角形 $\Rightarrow \overline{BD} = \overline{AB} = x$

在 ΔBCD 中，$\sin 60^\circ = \dfrac{30}{x} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{30}{x} \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ 小蘭在 1 分鐘內從 A 點移動至 B 點的距離爲 $20\sqrt{3}$ 公尺，故選(A)



16. $\because \vec{a} \perp \vec{c} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{c} = 0$

$\Rightarrow 3\times(x-1) + 2\times 9 = 0 \Rightarrow 3x - 3 + 18 = 0 \Rightarrow x = -5$

將 $x=-5$ 代入 $\vec{b}$ 得：$\vec{b} = (y+1\,,-8)$

又 $\vec{a} /\!/ \vec{b}$　$\therefore \dfrac{3}{y+1} = \dfrac{2}{-8} \Rightarrow y = -13$，故選(B)

17. $\because f(-5) = f(1) = -3$

$\therefore$ 設 $f(x) = a(x+5)(x-1) - 3$

又 $f(-3) = a\times 2\times(-4) - 3 = 13$

$\Rightarrow a = -2$

$\therefore f(x) = -2(x+5)(x-1) - 3$

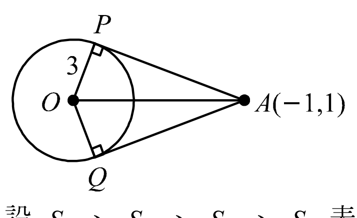
$\Rightarrow f(4) = (-2)\times 9\times 3 - 3 = -57$，故選(A)

18. 圓半徑 $= 3$

切線段長 $\overline{AP} = \sqrt{(-1-2)^2 + (1+4)^2 - 9} = 5$

四邊形 $APOQ$ 的面積 $= 2\times\Delta AOP$

$= 2\times\dfrac{1}{2}\times 3\times 5 = 15$，故選(B)



19. 設 S_1、S_2、S_3、S_4 表四段圓弧之長且 $S_4 > S_3 > S_2 > S_1$，其所對之圓心角爲 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4

因弧長成等差數列，故圓心角亦成等差數列

$\because \begin{cases} \theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4 = 360^\circ \\ S_4：S_1 = 3：1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(\theta_1+\theta_4)\times 4}{2} = 360^\circ \\ S_4 = 3S_1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \theta_1+\theta_4 = 180^\circ \\ \theta_4 = 3\theta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = 45^\circ \\ \theta_4 = 135^\circ \end{cases}$

$\therefore$ 最大弧長所對應的圓心角 $\theta_4 = 135^\circ$，故選(C)

[另解]設四段弧長所對的圓心角由小到大分別爲 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4

$\because$ 弧長成等差數列且最大弧長與最小弧長之比爲 3：1

$\therefore \theta_1 + \theta_4 = \theta_2 + \theta_3$ 且 $\theta_4 = 3\theta_1$

又 $\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4 = 360^\circ \Rightarrow 2(\theta_1+\theta_4) = 360^\circ$

$\Rightarrow \theta_1+\theta_4=180^\circ \Rightarrow \theta_1+3\theta_1=180^\circ \Rightarrow \theta_1=45^\circ$

$\therefore \theta_4=3\times 45^\circ=135^\circ$，故選(C)

20. 令 $\cos x=A$

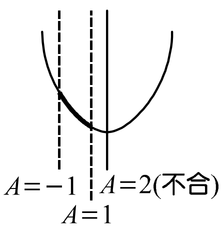
原式 $=2A^2-8A+1=2(A^2-4A+4)+1-8$

$=2(A-2)^2-7$

$\because -1\le \cos x\le 1 \Rightarrow -1\le A\le 1$

當 $A=1$ 時，$f(x)=2(1-2)^2-7=-5$

$\therefore f(x)$ 的最小值爲 -5，故選(C)



21. 將 $a+b=15$ 代入 $a+b+c+d=255$

$\Rightarrow 15+c+d=255 \Rightarrow c+d=240$

設公比爲 r，$r>0$

則 $b=ar$，$c=ar^2$，$d=ar^3$

$\because \begin{cases} a+b=15 \\ c+d=240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+ar=15 \\ ar^2+ar^3=240 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1+r)=15 \\ ar^2(1+r)=240 \end{cases}$

$\Rightarrow r^2=16 \Rightarrow r=\pm 4$ (負不合)

將 $r=4$ 代入 $a+ar=15$

$\Rightarrow a+a\times 4=15 \Rightarrow 5a=15 \Rightarrow a=3$

$\therefore b=ar \Rightarrow b=3\times 4=12$，故選(D)

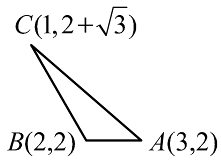
22. $\overrightarrow{BA}=(1,0)$，$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{1^2+0^2}=1$

$\overrightarrow{BC}=(-1,\sqrt{3})$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=1\times(-1)+0\times\sqrt{3}=-1$

$\because \cos B=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{-1}{1\times 2}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle B=120^\circ$，故選(C)



23. $\begin{cases} L_1：3x+y-5=0 \\ L_2：x-3y-5=0 \end{cases} \Rightarrow$ 交點坐標爲 $(2,-1)$

$\because L$ 垂直 L_3

$\therefore$ 設直線 L 的方程式爲 $5x+2y+k=0$ ……①

又 L 過點 $(2,-1)$ 代入①得 $10-2+k=0 \Rightarrow k=-8$

$\therefore L：5x+2y-8=0$

令 $x=0$ 代入 L 得 $0+2y-8=0 \Rightarrow y=4$

$\therefore L$ 與 y 軸的交點爲 $(0,4)$，故選(C)

24. 將 $(2,0)$ 代入圓 C 得：

$4+0+2d+0+f=0 \Rightarrow f=-2d-4$ ……①

將 $(1,1)$ 代入圓 C 得：$1+1+d+e+f=0$ ……②

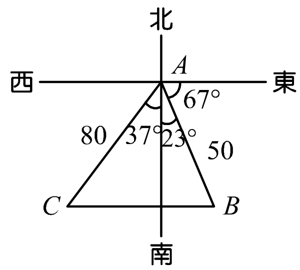
將圓心 $(-\dfrac{d}{2},-\dfrac{e}{2})$ 代入 L 得：$-d+\dfrac{e}{2}=0$ ……③

①代入②：$-d+e=2$ ……④

③×2－④：$d=2$ 分別代入①④兩式可得 $f=-8$，$e=4$

$\therefore d-e-f=2-4-(-8)=6$，故選(A)

25. 如下圖所示，在 ΔABC 中由餘弦定理可知



$\overline{BC}^2=50^2+80^2-2\times 50\times 80\times\cos 60^\circ$

$=2500+6400-2\times 50\times 80\times\dfrac{1}{2}=4900$

$\Rightarrow \overline{BC}=70$

$\therefore$ 平均速率爲 $\dfrac{70}{5}=14$ 公里/小時，故選(A)