110 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 110-3-C

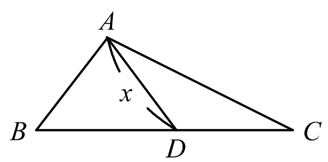
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	C	B	B	D	B	C	B	C	D	C	B	C	A	B	A	A	D	C	C	D	A	D	D	A

1. $\dfrac{9}{5}\cdot 30+32=86$，故選(A)

2. (A) $2022-2742=360\times(-2)$
   (B) $2022-222=1800=360\times 5$
   (C) $2022-22=2000$ 不是 360 的整數倍
   (D) $2022-(-138)=360\times 6$
   故選(C)

3. (A) $\dfrac{2\pi}{|-2022|}=\dfrac{\pi}{1011}$
   (B) $\dfrac{2\pi}{\frac{1}{8}}=16\pi$
   (C) $\dfrac{\pi}{100}$
   (D) $\dfrac{2\pi}{\left|-\frac{1}{2}\right|}=4\pi$
   故選(B)

4. 令 $\overline{AD}=x$
   ΔABD 中，$\cos B=\dfrac{5^2+6^2-x^2}{2\cdot 5\cdot 6}$
   ΔABC 中，$\cos B=\dfrac{5^2+11^2-(4\sqrt{5})^2}{2\cdot 5\cdot 11}$
   得 $\dfrac{5^2+6^2-x^2}{2\cdot 5\cdot 6}=\dfrac{5^2+11^2-(4\sqrt{5})^2}{2\cdot 5\cdot 11}\Rightarrow x=5$，故選(B)



5. $\overrightarrow{BA}=(3,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(3,0)$
   $|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$
   $|\vec{K}|=15=3|\overrightarrow{BA}|\Rightarrow \vec{K}=3\overrightarrow{BA}=(9,-12)$
   $\vec{K}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影為 $(\dfrac{\vec{K}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2})\overrightarrow{BC}$
   $=(\dfrac{(9,-12)\cdot(3,0)}{\sqrt{3^2+0^2}^{\,2}})(3,0)=(9,0)=(m,n)$
   $\Rightarrow m+n=9$，故選(D)

6. 因為是銳角，所以 $\cos\theta=\left|\dfrac{\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DI}}{|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{DI}|}\right|$
   $=\dfrac{|(14,2\sqrt{3})\cdot(-2,-6\sqrt{3})|}{\sqrt{14^2+(2\sqrt{3})^2}\cdot\sqrt{(-2)^2+(-6\sqrt{3})^2}}$
   $=\dfrac{4\sqrt{91}}{91}$，故選(B)

7. 由因式定理可知 $f(-1)=1+k-2-14=0$，$k=15$
   故選(C)

8. 令另一根為 α，由根與係數關係可知 $(1+i)+\alpha=1-i$
   $\Rightarrow \alpha=-2i$，故選(B)

9. 令所求直線為 $x+2y+k=0$，$(5,4)$ 代入
   得 $5+8+k=0$，$k=-13$　$\therefore x+2y-13=0$，故選(C)

10. 圓心 $Q(0,4)$，半徑 $=1$，$L：mx-y=0$
    相切 $\Rightarrow d(Q,L)=r\Rightarrow \dfrac{|0-4|}{\sqrt{m^2+1}}=1\Rightarrow m=\pm\sqrt{15}$
    又 $m>0\Rightarrow m=\sqrt{15}$，故選(D)

11. $1+3+3^2+\cdots+3^n=\dfrac{1\cdot(3^{n+1}-1)}{3-1}>100000$
    $\Rightarrow 3^{n+1}>200001$，又 $3^{11}=177147$
    $3^{12}=531441$，所以最小的 n 為 11，故選(C)

12. 利用公式 $\sum\limits_{k=1}^{20}k^2=\dfrac{20\cdot 21\cdot 41}{6}=2870$
    所以 $\sum\limits_{k=3}^{20}k^2=(\sum\limits_{k=1}^{20}k^2)-(1^2+2^2)=2870-5=2865$
    故選(B)

13. 甲、乙、丙 3 人要相鄰 $\Rightarrow$ 綁一起，看作一個，再跟丁、戊、己、庚作直線排列，共有 $5!$ 種排列方式，甲要在乙、丙中間 $\Rightarrow$ 有乙甲丙、丙甲乙兩種排列
    $\therefore$ 共有 $2\times 5!=240$ 種排列方式，故選(C)

14. 從 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 共 10 個數字挑 5 個，即 $C_5^{10}=\dfrac{10!}{5!5!}=252$ 種組合數，按一組數字需要花 20 秒，所以 $252\times 20=5040$，而 5040 秒 $=84$ 分鐘
    小明最多持續花 1 小時又 24 分鐘可以解開這個鎖
    故選(A)

15. 原式 $=\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta+\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta=\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$
    又 $-\dfrac{3\pi}{2}\le\theta\le 0$
    $\Rightarrow -\dfrac{5\pi}{4}\le\theta+\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{4}$
    $\Rightarrow \sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$ 最大值 $M=\sin\dfrac{\pi}{4}$ [或 $\sin(-\dfrac{5\pi}{4})$] $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
    最小值 $m=\sin(-\dfrac{\pi}{2})=-1$
    $\Rightarrow M^2+m^2=\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$，故選(B)

16. 原式為 $x^2+y^2+2(m+1)x-2my+3m^2+3m-11=0$

$\Rightarrow [x^2+2(m+1)x+(m+1)^2]+[y^2-2my+m^2]$

$=(m+1)^2+m^2-3m^2-3m+11$

$\Rightarrow (x+m+1)^2+(y-m)^2=-m^2-m+12$

$\because$圖形為一圓　$\therefore -m^2-m+12>0$

$\Rightarrow m^2+m-12<0$

$\Rightarrow (m+4)(m-3)<0 \Rightarrow -4<m<3$，故選(A)

17. 原式 $=\dfrac{|Z_1|^{12}\cdot|Z_3|}{|Z_2|^5}=\dfrac{\sqrt{1^2+2^2}^{12}\cdot\sqrt{8^2+15^2}}{(\sqrt{(-4)^2+3^2})^5}$

$=\dfrac{5^6\cdot 17}{5^5}=85$，故選(A)

18. 令 $2^x=t(t>0)\Rightarrow 4^x=2^{2x}=(2^x)^2=t^2$

原式 $\Rightarrow t^2-7t+12=0\Rightarrow (t-3)(t-4)=0$

$\Rightarrow t=3$ 或 $4\Rightarrow 2^x=3$ 或 4

①若 $2^x=4\Rightarrow x=2$ (不合　$\because$ x 不為整數)

②若 $2^x=3\Rightarrow 8^x=2^{3x}=(2^x)^3=3^3=27$，故選(D)

19. 底數 $\begin{cases} x+2\neq 1\Rightarrow x\neq -1\cdots\cdots① \\ x+2>0\Rightarrow x>-2\cdots\cdots② \end{cases}$

真數 $-x^2+3x+10>0\Rightarrow x^2-3x-10<0$

$\Rightarrow (x-5)(x+2)<0\Rightarrow -2<x<5\cdots\cdots③$

由①②③取交集可知 $-2<x<5$，但 $x\neq -1$，故選(C)

20. $f(x)=\sqrt{2[(x-2)^2+9]}+\sqrt{2[(x+4)^2+25]}$

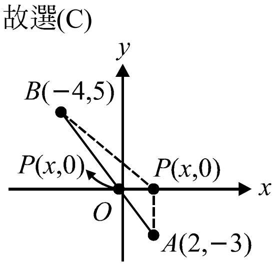
$=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{(x-2)^2+[0-(-3)]^2}+\sqrt{(x+4)^2+(0-5)^2})$

令 $P(x,0)$ 為 x 軸上的一點，$A(2,-3)$、$B(-4,5)$

可知 $f(x)=\sqrt{2}(\overline{PA}+\overline{PB})\geq\sqrt{2}\,\overline{AB}$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{[2-(-4)]^2+[-3-5]^2}=10\sqrt{2}$

故選(C)



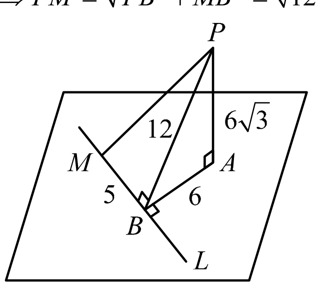
21. $p=69+12\times\log_2(\dfrac{110}{440})=69+12\times\log_2\dfrac{1}{4}$

$=69+12\times(-2)=45$，故選(D)

22. ΔPAB 中，$\overline{PB}=\sqrt{6^2+(6\sqrt{3})^2}=12$

由三垂線定理知 $\overline{PB}\perp L\Rightarrow \Delta PBM$ 為直角 Δ

$\Rightarrow \overline{PM}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{MB}^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，故選(A)



23. 所求之平行六面體體積為

$\left|\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&4\\5&-8&2\end{vmatrix}\right| \overset{\text{依第一列}}{\underset{\text{降階展開}}{=}} \left|\begin{vmatrix}3&4\\-8&2\end{vmatrix}\right|$

$=|6-(-32)|=38$，故選(D)

24. 方程組無解 $\Rightarrow \dfrac{a}{8}=\dfrac{2}{a}\neq\dfrac{1}{2}\Rightarrow a^2=16\Rightarrow a=\pm 4$

①若 $a=4\Rightarrow \dfrac{4}{8}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ (不合)

②若 $a=-4\Rightarrow \dfrac{-4}{8}=\dfrac{2}{-4}\neq\dfrac{1}{2}$ (合)，故選(D)

25. $A^2=\begin{bmatrix}3&x\\3&y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&x\\3&y\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9+3x&3x+xy\\9+3y&3x+y^2\end{bmatrix}=5A=\begin{bmatrix}15&5x\\15&5y\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}9+3x=15\\9+3y=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$

所求 $=(A-I_2)(A+I_2)=A^2-I_2A+AI_2-I_2^{\,2}$

$=A^2-A+A-I_2=5A-A+A-I_2=5A-I_2$

$=5\begin{bmatrix}3&2\\3&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&10\\15&10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14&10\\15&9\end{bmatrix}$

故選(A)