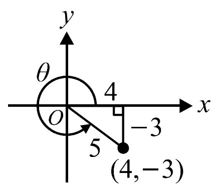
110 學年度四技二專第五次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 110-5-C

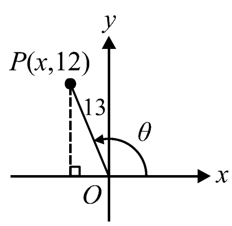
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	A	D	B	B	C	A	D	C	C	B	A	D	C	C	B	A	C	B	C	B	A	D	D	D

1. $y=f(x)=x^2+6x+13=(x^2+6x+9)-9+13$
$=(x+3)^2+4$
$\Rightarrow$ 頂點坐標爲 $(-3,4)$
$\therefore (-3,4)$ 到 $(0,0)$ 的距離爲 $\sqrt{(-3-0)^2+(4-0)^2}=5$
故選(A)

2. $\sin\theta+2\cos\theta=1 \Rightarrow 2\cos\theta=1-\sin\theta$
$\Rightarrow (2\cos\theta)^2=(1-\sin\theta)^2$
$\Rightarrow 4(1-\sin^2\theta)=1-2\sin\theta+\sin^2\theta$
$\Rightarrow 5\sin^2\theta-2\sin\theta-3=0 \Rightarrow (5\sin\theta+3)(\sin\theta-1)=0$
$\Rightarrow \sin\theta=-\frac{3}{5}$ 或 $\sin\theta=1$ (不合　$\because \theta\in$ IV)
$\Rightarrow \cos\theta=\frac{4}{5}$
$\therefore \sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{-3}{5}\times\frac{4}{5}=-\frac{12}{25}$
故選(A)



3. 利用廣義三角定義：
$y=12$，$r=13$，$x=\pm\sqrt{r^2-y^2}=\pm5$ (5 不合)
所求 $=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\tan\theta}=\frac{\frac{12}{13}+(\frac{-5}{13})}{\frac{12}{-5}}=-\frac{35}{156}$，故選(D)

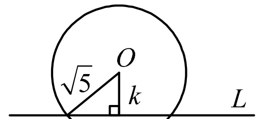


4. $\because (\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}) \,//\, (2\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$
$\Rightarrow (1+3k,2-3)\,//\,(2-k,4+1)$
$\Rightarrow \frac{1+3k}{2-k}=\frac{2-3}{4+1}=\frac{-1}{5} \Rightarrow 5+15k=k-2$
$\Rightarrow 14k=-7 \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$，故選(B)

5. 由題意可設：$f(x)=(3x-2)\cdot Q(x)+6$
$\Rightarrow x\cdot f(x)=x(3x-2)Q(x)+6x$
$=(x-\frac{2}{3})\cdot 3x\cdot Q(x)+6(x-\frac{2}{3})+4$
$\Rightarrow x\cdot f(x)$ 除以 $x-\frac{2}{3}$ 的餘式爲 4，故選(B)

6. $(2-3i)(1+i)=2-3i+2i+3=5-i \Rightarrow \overline{5-i}=5+i$
$\Rightarrow$ 虛部爲 1，故選(C)

7. $x^2+y^2=5 \Rightarrow$ 圓心 $O(0,0)$，半徑 $r=\sqrt{5}$
設直線 L：$mx-y-2=0$
$\because$ 線段 $d(O,L)=k=\sqrt{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{2}$
$\Rightarrow \frac{|-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2} \Rightarrow m=\pm1 \Rightarrow |m|=1$，故選(A)



8. 設 $P(x,y)$　$\because 2\overline{PA}=\overline{PB}$
$\Rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-6)^2+y^2}$
$\Rightarrow 4(x^2+y^2)=(x-6)^2+y^2$
$\Rightarrow 3x^2+3y^2+12x-36=0$
$\Rightarrow x^2+y^2+4x-12=0$
$\Rightarrow (x^2+4x+4)+y^2=12+4=16$
$\Rightarrow (x+2)^2+y^2=4^2$
$\Rightarrow$ 圓心 $(-2,0)$，半徑爲 4
故選(D)

9. $6,a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,32$ 成等差
利用等差中項：
$a_4=\frac{6+32}{2}=\frac{a_1+a_7}{2}=\frac{a_2+a_6}{2}=\frac{a_3+a_5}{2}$
所以 $a_1+a_3+a_5+a_7=4a_4$
$=4\times\frac{6+32}{2}=76$，故選(C)
[另解]
$6,a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots,a_7,32$ 成等差
設公差爲 d
$32=6+(9-1)d \Rightarrow d=\frac{13}{4}$
$\therefore a_1+a_3+a_5+a_7$
$=(6+d)+(6+3d)+(6+5d)+(6+7d)$
$=24+16d=24+16\times\frac{13}{4}=76$
故選(C)

10. 設公比爲 r，$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=-54\\a_3+a_4+a_5+a_6=-6\end{cases}$
$\Rightarrow \begin{cases}a_1+a_1\cdot r+a_1\cdot r^2+a_1\cdot r^3=-54\\a_1\cdot r^2+a_1\cdot r^3+a_1\cdot r^4+a_1\cdot r^5=-6\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{a_1+a_1\cdot r+a_1\cdot r^2+a_1\cdot r^3}{a_1\cdot r^2+a_1\cdot r^3+a_1\cdot r^4+a_1\cdot r^5}$

$=\dfrac{a_1(1+r+r^2+r^3)}{a_1r^2(1+r+r^2+r^3)}=\dfrac{-54}{-6}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{r^2}=9 \Rightarrow r^2=\dfrac{1}{9} \Rightarrow r=\pm\dfrac{1}{3}$

($\because$各項皆爲負數　$\therefore -\dfrac{1}{3}$不合)，故選(C)

11. 若是要排成左右讀都相同的迴文，討論 x 區即可(另一區做對稱)

$\boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{x}\ \boxed{x}\ \Big|\ \square\ \square\ \square\ \square$

將 A, B, C, C 放置到 x 區，其直線排列數爲 $\dfrac{4!}{2!}=12$

故選(B)

12. 討論：

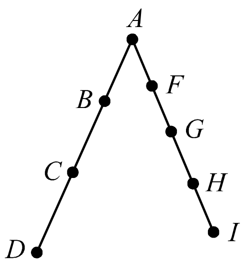
(1) 包含 A 點

$\Rightarrow 1(A\text{點必選})\times C_1^3(\text{左線3選1})\times C_1^4(\text{右線4選1})=12$

(2) 不包含 A 點

$\Rightarrow C_2^3\times C_1^4$(左線3選2及右線4選1) $+C_1^3\times C_2^4$(左線 3 選 1 及右線 4 選 2) $=12+18=30$

全部爲 $(1)+(2)=12+30=42$，故選(A)



13. (A) ×：$\log_2 10=\dfrac{1}{\log_{10}2}\neq\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}10}$

(B) ×：$\log 2+\log 3=\log 2\times 3\neq\log 5$

(C) ×：$\dfrac{\log_2 3}{\log_2 5}=\log_5 3\neq\log_2\dfrac{3}{5}$

(D) ○：$\log_4 9=\log_{2^2}3^2=\dfrac{2}{2}\log_2 3=\log_2 3$

故選(D)

14. 討論：$\because x, y, z\in Z$

(1) $|x+y|=4$ 且 $\sqrt{x-y+4}=0$ 且 $2x+3y-z=0$

$\Rightarrow x+y=\pm 4$ 且 $x-y+4=0$ 且 $2x+3y-z=0$

① $\begin{cases}x+y=4\\x-y=-4\\2x+3y=z\end{cases}\Rightarrow x=0, y=4, z=12$

② $\begin{cases}x+y=-4\\x-y=-4\\2x+3y=z\end{cases}\Rightarrow x=-4, y=0, z=-8$

(2) $|x+y|=0$ 且 $\sqrt{x-y+4}=1$ 且 $2x+3y-z=0$

$\Rightarrow x+y=0$ 且 $x-y+4=1$ 且 $2x+3y-z=0$

$\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\x-y=-3\\2x+3y=z\end{cases}\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{3}{2}, z=\dfrac{3}{2}$(不合)

$\therefore z=12$ 或 -8，故選(C)

15. $\overline{AB}$ 與直線 $x+y+3=0$ 相交

$\Rightarrow(-1-k+3)(-k+2+3)\le 0\Rightarrow(k-2)(k-5)\le 0$

$\Rightarrow 2\le k\le 5$……①

點 B 、C 在 $2x-y+10=0$ 之同側

$\Rightarrow(-2k-2+10)(2k-k+10)>0$

$\Rightarrow(k-4)(k+10)<0$

$\Rightarrow -10<k<4$……②

由①②可知：$2\le k<4$

$\therefore k=2$ 或 3，故選(C)

16. 原式爲 $x^2-3y^2=12\Rightarrow\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$ 爲左右型之雙曲線，中心爲 $(0, 0)$，$a^2=12$，$b^2=4$

$\Rightarrow c^2=12+4=16$

(A) 正焦弦長爲 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 4}{\sqrt{12}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

(B) $c=4$，所以焦點爲 $(\pm 4, 0)$

(C) 貫軸長爲 $2a=4\sqrt{3}$

(D) 漸近線方程式爲 $x\pm\sqrt{3}y=0$

故選(B)

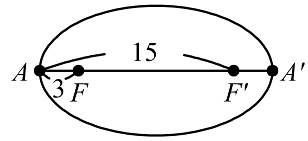
17. 長軸長爲 $\overline{AA'}=\overline{AF}+\overline{A'F}=\overline{AF}+\overline{AF'}$

$=3+15=18=2a\Rightarrow a=9$

又 $2c=\overline{AF'}-\overline{AF}=15-3=12\Rightarrow c=6$

$\Rightarrow b^2=a^2-c^2=9^2-6^2=45$

$\therefore$正焦弦長爲 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\times 45}{9}=10$，故選(A)



18. 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}\times\dfrac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3})^2-2^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{1+3}+2)=4$

故選(C)

19. $f'(x)=6x^2$

過 P 點 $(1, 5)$ 之切線斜率爲 $f'(1)=6$

$\Rightarrow$ 法線之斜率爲 $-\dfrac{1}{6}$，故選(B)

20. 股市加權指數漲跌點數爲

$800+800(-\dfrac{3}{5})+800(-\dfrac{3}{5})^2+800(-\dfrac{3}{5})^3+\cdots\cdots$

$=\dfrac{800}{1-(-\dfrac{3}{5})}=500$ (漲 500 點)

所以股市穩定之加權指數趨近於 $15000+500=15500$

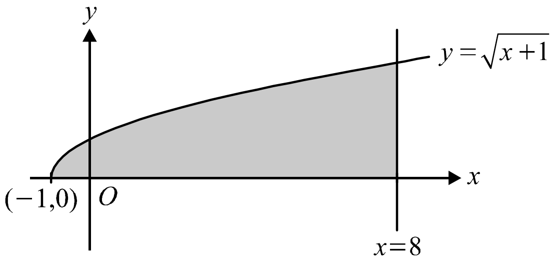
故選(C)

21. 由 $y=\sqrt{x+1}\Rightarrow y^2=x+1$，$y\geq 0$ 作圖如下

$\int_{-1}^{8}\sqrt{x+1}\,dx=\int_{-1}^{8}(x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{8}$

$=\frac{2}{3}(8+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(-1+1)^{\frac{3}{2}}=18$

故選(B)



22. $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\frac{1}{3}$

又 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\sin^2\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta)^2+(\cos^2\theta)^2$

$=(\frac{1}{3})^2+(\frac{2}{3})^2=\frac{5}{9}$

故選(A)

23. $X\cdot A=B\Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=B\cdot A^{-1}\Rightarrow X=B\cdot A^{-1}$

$=\begin{bmatrix}8&10\\18&-2\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{-14}\begin{bmatrix}-1&-5\\-2&4\end{bmatrix}=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}8&10\\18&-2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1&-5\\-2&4\end{bmatrix}$

$=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-8-20&-40+40\\-18+4&-90-8\end{bmatrix}$

$=-\frac{1}{14}\begin{bmatrix}-28&0\\-14&-98\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\1&7\end{bmatrix}$，故選(D)

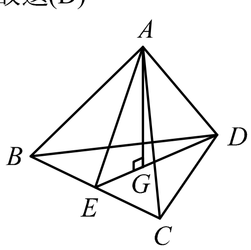
24. 稜長為 6，設 $\overline{BC}$ 中點為 E，則 $\overline{AE}$ 為 $3\sqrt{3}$，又正四面體的 A 投影到 ΔBCD 上，恰為 ΔBCD 之重心 G

所以 $\overline{DG}:\overline{GE}=2:1\Rightarrow\overline{GE}=\frac{1}{3}\overline{DE}=\sqrt{3}$

$\therefore$高 $=\overline{AG}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{GE}^2}$

$=\sqrt{(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

故選(D)



25. 如圖作 ΔABC 於複數平面上，令 B 為 $Z_1=4+3i$，C 為 $Z_2=a+bi$　$\because\overline{AB}=\overline{AC}$　$\therefore|Z_1|=|Z_2|\Rightarrow$ 向徑 1 倍

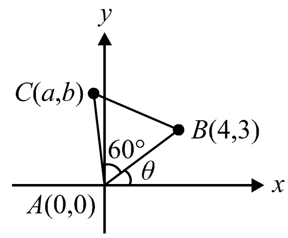
又 $Arg(Z_2)=Arg(Z_1)+60°\Rightarrow$ 幅角加 60°，可知由 B 點到 C 點相當於乘上複數 $1\times(\cos 60°+i\sin 60°)$

可得 $Z_2=Z_1\times(\cos 60°+i\sin 60°)$

$=(4+3i)(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)=(\frac{4-3\sqrt{3}}{2})+(\frac{3+4\sqrt{3}}{2})i$

$\Rightarrow a=\frac{4-3\sqrt{3}}{2}$，$b=\frac{3+4\sqrt{3}}{2}\Rightarrow b-a=\frac{7\sqrt{3}-1}{2}$

故選(D)



[另解]

$\because\Delta ABC$ 為正三角形　$\therefore\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AB}$

$\Rightarrow\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a-4)^2+(b-3)^2}=5$

$\Rightarrow a^2+b^2=25$ ……①

又 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a-4)^2+(b-3)^2}$

$\Rightarrow a^2+b^2=a^2-8a+16+b^2-6b+9$

$\Rightarrow 8a+6b=25$ ……②

解①②式得 $a=\frac{4-3\sqrt{3}}{2}$，$b=\frac{3+4\sqrt{3}}{2}$

$\therefore b-a=\frac{7\sqrt{3}-1}{2}$，故選(D)