111 學年度四技二專第二次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 111-2-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	C	B	C	D	D	B	A	D	A	B	C	A	C	A	D	B	C	A	C	B	D	D	C	A

1. $|6x-a|\le 24 \Rightarrow -24\le 6x-a\le 24$
$\Rightarrow a-24\le 6x\le a+24$，解為 $b\le x\le 5 \Rightarrow 6b\le 6x\le 30$
$\because \begin{cases} a-24=6b \\ a+24=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=-3 \end{cases}$　$\therefore P(-b\,,a)=(3\,,6)$
則 $\overline{PQ}=\sqrt{(6-3)^2+(2-6)^2}=5$，故選(B)

2. 單位向量的長度為 1
(A) $\overrightarrow{v_1}=(\sin 765^\circ\,,\cos 405^\circ)=(\sin 45^\circ\,,\cos 45^\circ)$
$=(\frac{\sqrt{2}}{2}\,,\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow |\overrightarrow{v_1}|=\sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=1$
(B) $\overrightarrow{v_2}=(\cos 180^\circ\,,\sin 180^\circ)=(-1\,,0)$
$\Rightarrow |\overrightarrow{v_2}|=\sqrt{(-1)^2+(0)^2}=1$
(C) $\overrightarrow{v_3}=(\frac{1}{2}\,,-\frac{1}{2}) \Rightarrow |\overrightarrow{v_3}|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ne 1$
(D) $\overrightarrow{v_4}=(-\frac{8}{17}\,,-\frac{15}{17})$
$\Rightarrow |\overrightarrow{v_4}|=\sqrt{(-\frac{8}{17})^2+(-\frac{15}{17})^2}=\sqrt{\frac{64+225}{289}}=1$
故選(C)

3. $a_1=3$、$a_2=5$、$a_3=7$，公差 $d=2$
$S_{30}=\frac{30}{2}[2\times 3+(30-1)\times 2]=15\times 64=960$
故選(B)

4. $12!=1\times 2\times 3\times 4\times\cdots\times 11\times 12=2^{10}\times 3^5\times 5^2\times 7\times 11$
則 12!的正因數個數：$t=(10+1)(5+1)(2+1)(1+1)(1+1)$
$=11\times 6\times 3\times 2\times 2=792$，故選(C)

5. $\sum_{k=1}^{20}a_k=\sum_{k=2}^{20}a_k+a_1=17+3=20$
$\sum_{k=1}^{20}b_k=\sum_{k=1}^{21}b_k-b_{21}=23-5=18$
$\therefore \sum_{k=1}^{20}(3a_k-4b_k+2)=3\times\sum_{k=1}^{20}a_k-4\times\sum_{k=1}^{20}b_k+\sum_{k=1}^{20}2$
$=3\times 20-4\times 18+2\times 20=28$，故選(D)

6. [法一]
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}=(8\,,6)-(6\,,4)=(2\,,2)$
$\therefore \Delta ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix}|=\frac{1}{2}|12-16|=2$
故選(D)
[法二]
$\therefore \Delta ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\times|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$
$=\frac{1}{2}\sqrt{8\times 100-(16+12)^2}=\frac{1}{2}\times 4=2$，故選(D)

7. $\because L_1\perp L_2 \Rightarrow (-\frac{a}{3})\times(-\frac{3}{9})=-1 \Rightarrow a=-9$
$\Rightarrow L_1：-9x+3y+11=0 \Rightarrow 9x-3y-11=0$
$\therefore \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}=\frac{d_{(P\,,L_1)}}{d_{(Q\,,L_1)}}=\frac{\frac{|9\times 1-3\times 2-11|}{\sqrt{9^2+(-3)^2}}}{\frac{|9\times 3-3\times(-4)-11|}{\sqrt{9^2+(-3)^2}}}=\frac{|-8|}{|28|}=\frac{2}{7}$
故選(B)

8. $\angle C=180^\circ-70^\circ-50^\circ=60^\circ$
由正弦定理可知：$\frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2R \Rightarrow R=6$
$\therefore$外接圓面積為 $\pi R^2=\pi\times 6^2=36\pi$，故選(A)

9. [法一]
設另兩根為 α、β，則 $2x^3+(3+2i)x^2-(2-3i)x-2i$
$=2(x+i)(x-\alpha)(x-\beta)$
比較 x^2 項係數：$3+2i=2(i-\alpha-\beta)$
$\Rightarrow 3+2i=2i-2(\alpha+\beta)$
$\Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{3}{2}$，故選(D)
[法二]
設另兩根為 α、β
由根與係數關係可知：三根和為
$-i+\alpha+\beta=-\frac{3+2i}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=-\frac{3+2i}{2}+i=-\frac{3}{2}$
故選(D)

10. 同乘 $(x-3)(x+3)(x-4)$
$\Rightarrow 4x^2+5x-63$
$=A(x+3)(x-4)+B(x-3)(x-4)+C(x-3)(x+3)$
$x=3$ 代入 $\Rightarrow 4\times 9+5\times 3-63=A\times 6\times(-1) \Rightarrow A=2$
$x=-3$ 代入 $\Rightarrow 4\times 9+5\times(-3)-63=B\times(-6)\times(-7)$
$\Rightarrow B=-1$
比較 x^2 項係數：$4=A+B+C=2-1+C \Rightarrow C=3$
$\therefore 2A-3B+C=2\times 2-3\times(-1)+3=10$，故選(A)

11. [法一]
「腕」排在中間位置，只有 1 種排法
剩下的 6 個字排列：全部 – 「大」排首位 – 「立」排末位 + 「大」排首位且「立」排末位 $=6!-5!-5!+4!$
$=504$，共 $1\times 504=504$ 種排法，故選(B)
[法二]
(「腕」排在中，「大」不排首位) – (「腕」排在中，「大」不排首位，「立」排末位) $=1\times 5\times 5!-1\times 1\times 4\times 4!$

$=600-96=504$ ，故選(B)

12. $m_1=-\dfrac{1}{4}$ 、 $m_2=1$ 、 $m_3=-\dfrac{3}{k}$
∵可以圍成三角形
∴(1) $m_1\neq m_3 \Rightarrow -\dfrac{1}{4}\neq -\dfrac{3}{k} \Rightarrow k\neq 12$
(2) $m_2\neq m_3 \Rightarrow 1\neq -\dfrac{3}{k} \Rightarrow k\neq -3$
(3) $\begin{cases} x+4y+5=0 \\ x-y-5=0 \end{cases} \Rightarrow y=-2$ 、 $x=3$
即 L_1 、 L_2 交點爲 $(3,-2)$ ， L_3 不能過點 $(3,-2)$
$\Rightarrow 3\times 3+k\times(-2)-3k+1\neq 0 \Rightarrow k\neq 2$ ，故選(C)

13. $x^2+y^2+4x-2y-4=0 \Rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=9$
利用柯西不等式：
$[(x+2)^2+(y-1)^2](3^2+4^2)\geq(3x+6+4y-4)^2$
$\Rightarrow 9\times 25\geq(3x+4y+2)^2$
$\Rightarrow -15\leq 3x+4y+2\leq 15 \Rightarrow -12\leq 3x+4y+5\leq 18$
∴最大值爲 18 ，故選(A)

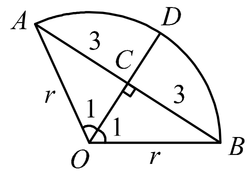
14. $S_n=\dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a_1-ra_n}{1-r} \Rightarrow 3577=\dfrac{7-1792r}{1-r}$
$\Rightarrow 3577-3577r=7-1792r \Rightarrow 1785r=3570 \Rightarrow r=2$
又 $a_n=a_1r^{n-1} \Rightarrow 1792=7\times 2^{n-1} \Rightarrow 256=2^{n-1} \Rightarrow 2^8=2^{n-1}$
∴ $n=9$ ，故選(C)

15. (1) 若排 4 天，則每天有 2 個上課時段：
$C_4^5\times C_2^3\times C_2^3\times C_2^3\times C_2^3=405$
(2) 若排 5 天，則 3 天排 2 個上課時段，2 天排 1 個上課時段： $C_3^5\times C_2^3\times C_2^3\times C_2^3\times C_2^2\times C_1^3\times C_1^3=2430$
共有 $405+2430=2835$ 種排法，故選(A)

16. 每個開運御守的平均成本爲 $\dfrac{1000}{n}+\dfrac{2n}{5}$
利用算幾不等式：
$\dfrac{\frac{1000}{n}+\frac{2n}{5}}{2}\geq\sqrt{\dfrac{1000}{n}\times\dfrac{2n}{5}} \Rightarrow \dfrac{1000}{n}+\dfrac{2n}{5}\geq 40$
等號成立時， $\dfrac{1000}{n}=\dfrac{2n}{5} \Rightarrow n^2=2500 \Rightarrow n=50$
∴每次必須生產 50 個，故選(D)

17. ∵正方形 $DEFG$ 的面積爲 36
$\Rightarrow \overline{EF}=\overline{FG}=\overline{DG}=6$
$\Rightarrow \tan A=\dfrac{3}{4}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{AF}} \Rightarrow \overline{AF}=8$
又 $\angle CDG=90^\circ-\angle DCG=90^\circ-\angle BCA=\angle BAC$
$\Rightarrow \tan\angle CDG=\tan A \Rightarrow \dfrac{\overline{CG}}{\overline{DG}}=\dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\overline{CG}}{6}=\dfrac{3}{4}$
$\Rightarrow \overline{CG}=\dfrac{9}{2}$
∴ $\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{FG}+\overline{GC}=8+6+\dfrac{9}{2}=\dfrac{37}{2}$ ，故選(B)

18. 設扇形半徑爲 r
過 O 點做垂線分別交弦 AB 於 C 點，交 $\overset{\frown}{AB}$ 於 D 點
$\Rightarrow \angle AOC=\angle BOC=1$ ， $\overline{AC}=3=\overline{BC}$
在 ΔAOC 中， $\sin 1=\dfrac{3}{r} \Rightarrow r=\dfrac{3}{\sin 1}$
∴扇形面積 $=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{3}{\sin 1})^2\times 4=\dfrac{18}{\sin^2 1}$
故選(C)



19. $\overrightarrow{BA}=(1,-3)$ ， $\overrightarrow{BC}=(-3,4) \Rightarrow |\overrightarrow{BC}|=5$
$\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影爲
$\overrightarrow{BD}=(\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2})\times\overrightarrow{BC}=(\dfrac{-3-12}{25})(-3,4)=(\dfrac{9}{5},-\dfrac{12}{5})$
又 $\overrightarrow{BD}=(a-2,b-1) \Rightarrow a-2=\dfrac{9}{5}$ 且 $b-1=-\dfrac{12}{5}$
$\Rightarrow a=\dfrac{19}{5}$ 、 $b=-\dfrac{7}{5}$
∴ $a+2b=\dfrac{19}{5}+2\times(-\dfrac{7}{5})=1$ ，故選(A)

20. 設總人數爲 $20+x$ 人
則總收入爲 $(20+x)(1600-50x)$
$=32000+600x-50x^2$
$=-50(x^2-12x+36)+1800+32000$
$=-50(x-6)^2+33800$
$\Rightarrow$ 當 $x=6$ 時，有最大總收入
∴總人數爲 $20+6=26$ 人，故選(C)

21. $x=\dfrac{4}{\sqrt{28-\sqrt{768}}}=\dfrac{4}{\sqrt{28-2\sqrt{192}}}=\dfrac{4}{\sqrt{16}-\sqrt{12}}$
$=4+2\sqrt{3} \Rightarrow x-4=2\sqrt{3} \Rightarrow (x-4)^2=(2\sqrt{3})^2$
$\Rightarrow x^2-8x+4=0$
又 $f(x)=x^4-6x^3-15x^2+33x-16$
$=(x^2-8x+4)(x^2+2x-3)+(x-4)$
∴ $f(4+2\sqrt{3})$
$=0\times[(4+2\sqrt{3})^2+2(4+2\sqrt{3})-3]+(4+2\sqrt{3}-4)=2\sqrt{3}$
故選(B)

22. 第 1 年存入的 20000 元到第 3 年年底所得的本利和爲 $20000(1+10\%)^3$
第 2 年存入的 20000 元到第 3 年年底所得的本利和爲 $20000(1+10\%)^2$
第 3 年存入的 20000 元到第 3 年年底所得的本利和爲 $20000(1+10\%)$
所以到第 3 年年底所得的本利和爲
$20000(1+10\%)^3+20000(1+10\%)^2+20000(1+10\%)$
$=20000\times(1.331+1.21+1.1)=72820$ ，故選(D)

23. 由根與係數知： $\alpha+\beta=-8$ 、 $\alpha\beta=4$
(A) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-8)^2-2\times 4=56$
(B) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-8)^3-3\times 4\times(-8)=-416$

(C) $\because \alpha+\beta=-8$ 、 $\alpha\beta=4 \Rightarrow \alpha<0$ 、 $\beta<0$

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)-2\sqrt{\alpha\beta}=-8-2\sqrt{4}=-12$

(D) $\because \alpha$ 、 β 爲方程式 $x^2+8x+4=0$ 之兩根

$\Rightarrow \alpha^2+8\alpha+4=0 \Rightarrow \alpha^2+6\alpha=-2\alpha-4$

同理 $\beta^2+6\beta=-2\beta-4$

$\therefore (\alpha^2+6\alpha+7)(\beta^2+6\beta+7)$

$=(-2\alpha-4+7)(-2\beta-4+7)=(3-2\alpha)(3-2\beta)$

$=9-6(\alpha+\beta)+4\alpha\beta=9-6\times(-8)+4\times4=73$

故選(D)

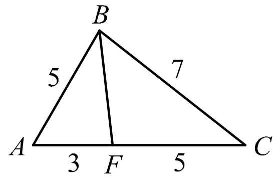
24. 在 ΔABC 中，由餘弦定理可知：

$\cos A=\dfrac{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\overline{BC}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}$

在 ΔABF 中，由餘弦定理可知：

$\overline{BF}^2=\overline{AB}^2+\overline{AF}^2-2\overline{AB}\times\overline{AF}\times\cos A$

$=5^2+3^2-2\times5\times3\times\dfrac{1}{2}=19 \Rightarrow \overline{BF}=\sqrt{19}$ ，故選(C)



25. [法一]

儲藏室位於這三個坐標所構成的圓之圓心。設圓方程式爲 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

$(-3,7)$ 代入 $\Rightarrow 9+49-3d+7e+f=0$

$\Rightarrow 3d-7e-f=58$ ……①

$(4,6)$ 代入 $\Rightarrow 16+36+4d+6e+f=0$

$\Rightarrow 4d+6e+f=-52$ ……②

$(3,-1)$ 代入 $\Rightarrow 9+1+3d-e+f=0$

$\Rightarrow 3d-e+f=-10$ ……③

① + ② $\Rightarrow 7d-e=6$ ……④

① + ③ $\Rightarrow 6d-8e=48 \Rightarrow 3d-4e=24$ ……⑤

$4\times$ ④ − ⑤ $\Rightarrow 25d=0 \Rightarrow d=0$

代入④ $\Rightarrow e=-6$ ，代入③ $\Rightarrow f=-16$

$\Rightarrow$ 圓方程式爲 $x^2+y^2-6y-16=0$ ，圓心爲 $(0,3)$ ，半徑爲 5

$\therefore$蔬果儲藏室與種植大白菜的距離即爲半徑 5

故選(A)

[法二]

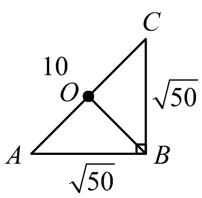
設 $A(-3,7)$ ， $B(4,6)$ ， $C(3,-1)$

$\because$儲藏室 O 爲 ΔABC 之外心

又 $\overline{AB}=\sqrt{(-3-4)^2+(7-6)^2}=\sqrt{50}$

$\overline{BC}=\sqrt{(3-4)^2+(-1-6)^2}=\sqrt{50}$

$\overline{CA}=\sqrt{(-3-3)^2+[7-(-1)]^2}=10$



$\Rightarrow \Delta ABC$ 爲等腰直角三角形

$\therefore$外接圓半徑 R 爲 $\dfrac{1}{2}\overline{CA}=\dfrac{1}{2}\times10=5$

故選(A)