112 學年度四技二專第一次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 112-1-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
D	D	B	C	C	D	A	D	C	B	A	B	C	D	B	B	D	A	A	B	A	C	C	B	A

1. 單位向量即長度為 1 的向量

(A) ○：$\sqrt{(-\frac{3}{5})^2+(\frac{4}{5})^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}=1$

(B) ○：$\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$

(C) ○：$\sqrt{(\cos 53°)^2+(\sin 53°)^2}=\sqrt{1}=1$

(D) ×：$\sqrt{(\sec 30°)^2+(\tan 30°)^2}=\sqrt{(\frac{2}{\sqrt{3}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}$

$=\sqrt{\frac{5}{3}}\neq 1$

故選(D)

2. 由重心性質，得 $\frac{t+(-2)+6}{3}=\frac{7}{3}\Rightarrow t=3$

$\frac{s+4+(-2)}{3}=4\Rightarrow s=10$

$\therefore 5t-2s=5\times 3-2\times 10=-5$，故選(D)

3. $\because$ 書桌與書櫃皆在拋物線 $y=x^2-1$ 上

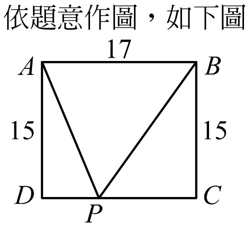
$\Rightarrow m=(-3)^2-1=8$，$n=4^2-1=15$

即書桌 $(-3,8)$，書櫃 $(4,15)$

則兩者的距離為 $\sqrt{[4-(-3)]^2+(15-8)^2}=\sqrt{49+49}$

$=7\sqrt{2}$，故選(B)

4. 依題意作圖，如下圖



$\therefore$ 所求 $\cot\angle APD+\cot\angle BPC=\frac{\overline{DP}}{15}+\frac{\overline{PC}}{15}=\frac{\overline{DP}+\overline{PC}}{15}$

$=\frac{\overline{AB}}{15}=\frac{17}{15}$，故選(C)

5. (1) 若 $x\geq 0$，原式 $\Rightarrow 3x+2x<15\Rightarrow x<3$

(2) 若 $x<0$，原式 $\Rightarrow -3x+2x<15\Rightarrow x>-15$

由(1)(2)綜合可知：$-15<x<3$，又 x 為整數

$\therefore x=-14$、-13、-12、…、-1、0、1、2，共 17 個，故選(C)

6. 週期 $=\frac{2\pi}{\left|-\frac{2}{3}\right|}=3\pi$，故選(D)

7. $\because \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=(4,3)-(1,4)=(3,-1)$

又 $\overrightarrow{BD}=x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow (4,3)=x(1,2)+y(3,-1)=(x+3y,2x-y)$

$\Rightarrow\begin{cases}x+3y=4\\2x-y=3\end{cases}$ 兩式相加得 $3x-2y=7$，故選(A)

8. $\because f(x)$ 恆負　$\therefore b^2-4ac<0$

$5^2-4\times(-1)\times k<0\Rightarrow 4k<-25\Rightarrow k<-\frac{25}{4}$，故選(D)

9. $\because 1$ 弧度 $=\frac{180°}{\pi}\fallingdotseq 57.3°$

$\therefore \theta=111\fallingdotseq 111\times 57.3°=6360.3°=360°\times 17+240.3°$

故所求最大負同界角為 $111-18\times 2\pi=111-36\pi$

故選(C)

10. $\frac{\cos(-\theta)}{\sin(270°-\theta)}+\frac{\tan(180°+\theta)}{\tan(360°-\theta)}-\frac{\sec(90°+\theta)}{\sec(270°+\theta)}$

$=\frac{\cos\theta}{-\cos\theta}+\frac{\tan\theta}{-\tan\theta}-\frac{-\csc\theta}{\csc\theta}=-1-1+1=-1$，故選(B)

11. $|\overrightarrow{AC}|^2+|\overrightarrow{BD}|^2=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|^2$

$=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}|^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{AB}|^2$

$=3^2+5^2+5^2+3^2=68$，故選(A)

12. 所求 $=[\sin^2 43°+\sin^2(90°-43°)]$

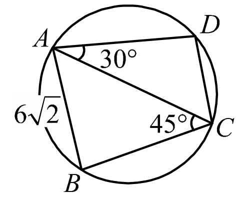
$+[\tan^2 43°-\csc^2(90°-43°)]+[\cot^2 51°-\sec^2(90°-51°)]$

$=(\sin^2 43°+\cos^2 43°)+(\tan^2 43°-\sec^2 43°)$

$+(\cot^2 51°-\csc^2 51°)$

$=1+(-1)+(-1)=-1$，故選(B)

13. 依題意畫出圖形，如下圖



設外接圓半徑為 R

在 ΔACD 中，$\frac{\overline{CD}}{\sin 30°}=2R$，在 ΔABC 中，$\frac{6\sqrt{2}}{\sin 45°}=2R$

得 $\frac{\overline{CD}}{\sin 30°}=2R=\frac{6\sqrt{2}}{\sin 45°}$　$\therefore \overline{CD}=\frac{\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=6$

故選(C)

14. $\vec{a}+t\vec{b}=(-1,3)+t(3,-4)=(3t-1,3-4t)$

$\because (\vec{a}+t\vec{b})\,//\,\vec{c}$

$\therefore \dfrac{3t-1}{4}=\dfrac{3-4t}{5}\Rightarrow 15t-5=12-16t\Rightarrow t=\dfrac{17}{31}$

$s\vec{a}+\vec{b}=s(-1,3)+(3,-4)=(3-s,3s-4)$

$\because (s\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{c}$

$\therefore (3-s,3s-4)\cdot(4,5)=0\Rightarrow 12-4s+15s-20=0$

$\Rightarrow s=\dfrac{8}{11}$，得 $11s-31t=11\times\dfrac{8}{11}-31\times\dfrac{17}{31}=-9$，故選(D)

15. 設花園的長爲 x $(x>0)$，花園的寬爲 y $(y>4)$，且花園的寬須留 2 個 4 公尺的出入口

則 $(y-4)+x+(y-4)=32$

$\Rightarrow x+2y=40$，且花園面積爲 xy

[法一]

利用算幾不等式

$\dfrac{x+2y}{2}\ge\sqrt{2xy}\Rightarrow 20\ge\sqrt{2xy}\Rightarrow 2xy\le 400\Rightarrow xy\le 200$

[法二]

由 $x=40-2y>0\Rightarrow 4<y<20$，可知 $xy=(40-2y)\cdot y$

$=-2y^2+40y=-2(y^2-20y+10^2)+200$

$=-2(y-10)^2+200$，當 $y=10$ 時，xy 有最大値 200

故選(B)

16. ∵攝氏與華氏的關係成線型函數

∴設 $y=ax+b$，其中 y 爲華氏溫度，x 爲攝氏溫度

$(0,32)$ 代入 $\Rightarrow b=32$

$(100,212)$ 代入 $\Rightarrow 212=a\times100+32\Rightarrow a=\dfrac{9}{5}$

即 $y=\dfrac{9}{5}x+32$，又溫差 $=x_{日}-x_{夜}=11$

$\Rightarrow y_{日}=\dfrac{9}{5}x_{日}+32$ ……① 、 $y_{夜}=\dfrac{9}{5}x_{夜}+32$ ……②

由①－②，得

$y_{日}-y_{夜}=\dfrac{9}{5}(x_{日}-x_{夜})=\dfrac{9}{5}\times11=\dfrac{99}{5}=19.8\fallingdotseq 20$

故選(B)

17. $f(\theta)=-\sin^2\theta-4\cos\theta+6$

$=-(1-\cos^2\theta)-4\cos\theta+6$

$=\cos^2\theta-4\cos\theta+5=(\cos^2\theta-4\cos\theta+4)+1$

$=(\cos\theta-2)^2+1$

$\because -1\le\cos\theta\le1$，$\cos\theta=2$ 不在範圍內

$\therefore \cos\theta=-1$ 代入，得 $M=(-1-2)^2+1=10$

$\cos\theta=1$ 代入，得 $m=(1-2)^2+1=2$

所求 $M-m=10-2=8$，故選(D)

18. $\because \sin A:\sin B:\sin C=2:3:2$

$\Rightarrow \overline{BC}:\overline{AC}:\overline{BA}=2:3:2$

又 $\overline{AC}=3$，所以 $\overline{BC}=2$ 、 $\overline{AB}=2$

$|\overrightarrow{AD}|^2=\left|\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right|^2$

$=\dfrac{1}{16}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{3}{8}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\dfrac{9}{16}|\overrightarrow{AC}|^2$

$=\dfrac{1}{16}\times4+\dfrac{9}{16}\times9+\dfrac{3}{8}\times|\overrightarrow{AB}|\times|\overrightarrow{AC}|\times\cos\angle BAC$

$=\dfrac{85}{16}+\dfrac{3}{8}\times2\times3\times\dfrac{2^2+3^2-2^2}{2\times2\times3}=\dfrac{112}{16}=7$

$\therefore |\overrightarrow{AD}|=\sqrt{7}$，故選(A)

19. 設阿全現在體重爲 x 公斤，身高爲 1.8 公尺

依題意得到

$18.5\le\dfrac{x+6}{1.8^2}\le24\Rightarrow 59.94\le x+6\le77.76$

$\Rightarrow 53.94\le x\le71.76$

∴阿全現在的體重可能爲 54 公斤，故選(A)

20. 依題意，將三邊長直接代入公式即可求出三角形面積

$S=\sqrt{\dfrac{1}{4}[(\sqrt{5})^2\times(\sqrt{3})^2-(\dfrac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{3})^2-2^2}{2})^2]}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{4}[5\times3-(\dfrac{5+3-4}{2})^2]}=\sqrt{\dfrac{11}{4}}=\dfrac{\sqrt{11}}{2}$，故選(B)

21. $P(-113,102)$ 在第二象限

設斜邊 $r=\sqrt{(-113)^2+102^2}>0$

$\sin\theta=\dfrac{102}{r}>0$，$\cos\theta=-\dfrac{113}{r}<0$，$\tan\theta=-\dfrac{102}{113}<0$

$3\cos\theta+4\sin\theta=3\times(-\dfrac{113}{r})+4\times\dfrac{102}{r}=\dfrac{69}{r}>0$

$5\sin\theta-6\tan\theta=5\times\dfrac{102}{r}-6\times(-\dfrac{102}{113})>0$

$\therefore Q(3\cos\theta+4\sin\theta,5\sin\theta-6\tan\theta)$ 在第一象限

故選(A)

22. $\overrightarrow{PQ}=(7,-1)$，$\overrightarrow{PR}=(6,-8)$

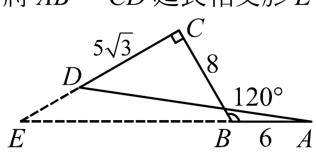
$|\overrightarrow{PR}|=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$

$\therefore \overrightarrow{PQ}$ 在 $\overrightarrow{PR}$ 上的正射影 $=(\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PR}|^2})\times\overrightarrow{PR}$

$=[\dfrac{(7,-1)\cdot(6,-8)}{100}](6,-8)=(\dfrac{42+8}{100})(6,-8)=(3,-4)$

故選(C)

23. 將 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 延長相交於 E 點，如下圖



$\angle ABC=120°\Rightarrow\angle EBC=60°$

且 $\angle BCD=90°\Rightarrow\angle CEB=30°$

在 ΔBCE 中，$\overline{BC}=8\Rightarrow\overline{EB}=16$ 、 $\overline{EC}=8\sqrt{3}$

在 ΔEDA 中，$\overline{ED}=8\sqrt{3}-5\sqrt{3}=3\sqrt{3}$、$\overline{EA}=16+6=22$

利用餘弦定理

$\Rightarrow \overline{AD}^2=\overline{ED}^2+\overline{EA}^2-2\overline{ED}\times\overline{EA}\times\cos30°$

$=(3\sqrt{3})^2+22^2-2\times3\sqrt{3}\times22\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=313$

$\therefore \overline{AD}=\sqrt{313}$，故選(C)

[另解]

所求 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|$

$=|(-6,0)+(8\cos 120°, 8\sin 120°)+(5\sqrt{3}\cos 210°, 5\sqrt{3}\sin 210°)|$

$=|(-6,0)+(-4,4\sqrt{3})+(-\dfrac{15}{2},-\dfrac{5\sqrt{3}}{2})|=|(-\dfrac{35}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2})|$

$=\sqrt{(-\dfrac{35}{2})^2+(\dfrac{3\sqrt{3}}{2})^2}=\sqrt{\dfrac{1225}{4}+\dfrac{27}{4}}=\sqrt{\dfrac{1252}{4}}=\sqrt{313}$，

故選(C)

24. 設 ΔABC 的邊長為 x，ΔDEF 的邊長為 y

六邊形 $ABCDEF$ 的面積 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{4}y^2=5\sqrt{3}$

$\Rightarrow x^2+y^2=20$

六邊形 $ABCDEF$ 的周長 $=2x+2y+(x-y)=3x+y$，

所求為 $3x+y$ 的最大值

利用柯西不等式：

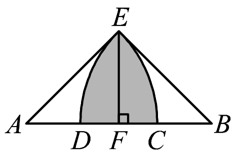
$(x^2+y^2)(3^2+1^2)\ge(3x+y)^2 \Rightarrow 20\times 10\ge(3x+y)^2$

$\Rightarrow -10\sqrt{2}\le 3x+y\le 10\sqrt{2}$　∴周長最大值為 $10\sqrt{2}$

故選(B)

25. $r=\overline{AE}=\overline{AC}=\overline{BD}=\overline{BE}=4\sqrt{2}$

對 E 作垂線交 $\overline{AB}$ 於 F 點，如下圖

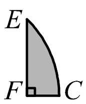


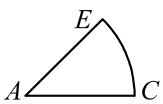
$\Rightarrow \overline{DF}=\overline{CF}=\dfrac{\overline{CD}}{2}=4(\sqrt{2}-1)$

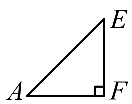
$\overline{AF}=\overline{AC}-\overline{CF}=4\sqrt{2}-4(\sqrt{2}-1)=4$

$\overline{EF}=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{AF}^2}=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4^2}=4 \Rightarrow \angle EAF=\dfrac{\pi}{4}$

∴灰色的區域面積

$=2\times$ 

$=2\times[$ 

$-$ 

$]$

$=2[\dfrac{1}{2}\times(4\sqrt{2})^2\times\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\times 4\times 4]$

$=8\pi-16$，故選(A)